6. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat in den Anwendungen vor allem zwei Funktionen:

(i) Einerseits will man Situationen, in denen Ereignisse nicht sicher, sondern lediglich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, auftreten mit mathematischen Methoden beschreiben und untersuchen. Dieser Ansatz führt auf die sog. **Wahrscheinlichkeitstheorie** oder **Stochastik**.

(ii) Andererseits geht es um die Untersuchung von großen empirischen Datenmengen und die Extraktion von Parametern, etwa die Korrelation zw. verschiedenen Größen, aus diesen Datensätzen. Dieser Zweig wird als **mathematische Statistik** bezeichnet.

6.1. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Betrachten wir das „Experiment" eines

mehrfach hintereinander geworfenen Würfels. Es ergibt sich eine Serie von Augenzahlen, z.B.

$$1, 3, 4, 2, 6, 6, 5, 3, 2, \ldots$$

Jeden der 6 Ausgänge „1", „2", „3", „4", „5" oder „6" bezeichnet man als Ergebnis und die Menge dieser Ausgänge als Ergebnisraum.
Falls der Würfel nicht gezinkt ist, ist die Wahrscheinlichkeit für jeden der 6 Ausgänge gleich 1/6.

Definition:

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge. Ist dann $P(\Omega)$ die Menge aller Teilmengen von Ω, so heißt eine Abbildung

$$p: P(\Omega) \to \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften

(i) $p(E) \geq 0 \quad \forall E \in P(\Omega)$

(Nicht-Negativität)

(ii) $p(\Omega) = 1$ (Normiertheit)

(iii) $p(E_1 + E_2) = p(E_1) + p(E_2)$

für $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

(Additivität)

eine Wahrscheinlichkeitsfunktion oder Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\mathcal{P}(\Omega)$. Ω bezeichnet man als Ergebnisraum mit Ergebnissen $\omega \in \Omega$. $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt Ereignisraum mit Ereignissen $E \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Beispiel:

Betrachten wir wieder das Würfeln.

Der Ergebnisraum ist

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

und der Ereignisraum besteht aus allen Teilmengen von Ω, also

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{ \{1\}, \{2\}, \ldots, \{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{1,2,3\}, \ldots \}$$

Betrachten wir zum Beispiel die Ereignisse

Augenzahl gerade: $E_g = \{2, 4, 6\}$

Augenzahl ungerade: $E_u = \{1, 3, 5\}$

Die Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse (Ergebnisse) sind

$$p(\{1\}) = \ldots = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Daher ist nun

$$p(E_g) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad p(E_u) = \frac{1}{2}.$$

Betrachten wir andererseits die Ereignisse

$$E_g = \{2, 4, 6\}, \quad E_{<4} = \{1, 2, 3\},$$

so ist klar, daß

$$p(E_g \cup E_{<4}) = p(\{1, 2, 3, 4, 6\})$$
$$= \frac{5}{6} \neq p(E_g) + p(E_{<4}) = 1$$

aber:

$$p(E_g \cup E_{<4}) = p(E_g) + p(E_{<4}) - p(E_g \cap E_{<4} = \{2\}),$$

d.h. es gilt

Satz: Für eine WS-Funktion

$$p : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

gilt für $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Andererseits läßt sich etwa fragen, was die WS dafür ist, eine „2" zu werfen, wenn man schon weiß, daß das Ergebnis eine gerade Zahl ist:

$$p(\{2\} \mid \{2,4,6\}) = \frac{1}{3}.$$

Man spricht hier von der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Offenbar ist:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$$

$$\Rightarrow \quad p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Satz: (bedingte Wahrscheinlichkeit)

Für zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ heißt

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Voraussetzung A.

(a) Ist $A \cap B = \emptyset$, so gilt

$$p(B|A) = 0 = p(A|B)$$

(b) Ist $p(A|B) = p(A)$, so heißen

A und B statistisch unabhängig und es ist

(i) $p(B|A) = p(B)$

(i) $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

(c) Es gilt

$$p(B) = p(A)\,p(B|A) + p(\bar{A})\,p(B|\bar{A}),$$

wo $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

(d) Es gilt das Bayessche Theorem,

$$p(A|B) = \frac{p(A)}{p(B)}\, p(B|A)$$

Beweis:

(b) $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \overset{!}{=} p(A)$

$$\Longrightarrow \quad p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

(d) $p(A)\,p(B|A) = p(A \cap B) = p(B)\,p(A|B)$

$$\Longrightarrow \quad p(A|B) = \frac{p(A)}{p(B)}\, p(B|A)$$

$\square$

Beispiel:

Eine Variante des Bayesschen Theorems folgt aus (d) mit Hilfe der Identität (c):

$$p(A|B) = \frac{p(A)\,p(B|A)}{p(A)\,p(B|A) + p(\bar{A})\,p(B|\bar{A})}$$

Betrachte nun folgende Situation: eine Krankheit trete bei einem von 10.000 Menschen auf. Ein Bluttest weise die Krankheit mit der WS 99,99% nach. Bei gesunden Menschen liefert der Test allerdings auch in 0,02% der Fälle ein positives Ergebnis. Wie groß ist die WS, daß ein zufällig ausgewählter Mensch mit positivem Ergebnis krank ist?

Sei nun A das Ereignis „Erkrankung" und B das Ereignis „positiver Test", dann ist

$$p(A|B) = \frac{\frac{1}{10000}\cdot\frac{9999}{10000}}{\frac{1}{10000}\cdot\frac{9999}{10000} + \frac{9999}{10000}\cdot\frac{2}{10000}}$$

$$\approx \frac{1}{3},$$

d.h. trotz der hohen Zuverlässigkeit des Tests ist die Unsicherheit nach dem Test immer noch sehr groß

6.2. Anordnungen u. Kombinationen

Um die WS eines Ereignisses zu bestimmen, muß man häufig die Anzahl seiner (gleichwahrscheinlichen) Elemente abzählen.

Beispiel:

Wie groß ist die WS in 6 Würfen die 6 Augenzahlen je genau einmal zu erhalten?

Wir suchen also die Zahl der möglichen Anordnungen der Reihe (1,2,3,4,5,6).
Für das erste Element hat man 6 Möglichkeiten, für das zweite 5 usw., für das letzte nur noch eine.

Es ist also $n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$ die Zahl der möglichen Anordnungen von n verschiedenen Elementen.

Die gesuchte WS ist also

$$p = \frac{6!}{6^6} \approx 1{,}5\,\%.$$

Ähnlich findet man für die Anzahl von Anordnungen von n Elementen, von denen jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_m$ Elemente untereinander gleich sind:

$$N = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_m!}.$$

Häufig benötigt man auch die Anzahl an Kombinationen der Größe k aus n verschiedenen Elementen, d.h. Teilmengen ohne Ansehen der Anordnung.

Beispiel:

Beim Lotto suchen wir die Anzahl der möglichen Kombinationen von 6 aus 49 Elementen. Diese Zahl ist allgemein gegeben durch die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

d.h. hier: $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,(49-6)!} \approx 14$ Mio.

6.3. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir hatten Wahrscheinlichkeiten allgemein als Funktionen über dem Ereignisraum definiert. Häufig lassen sich den Ereignissen in natürlicher Weise (reelle) Zahlen zuordnen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit eine Funktion im engeren Sinne.

Für das Würfeln können wir die Ausgänge von 1 bis 6 durchnummerieren und nennen etwa X die Anzahl der Augen in einem Wurf:

$$p(X) = \frac{1}{6}, \quad X = 1, 2, \ldots, 6$$

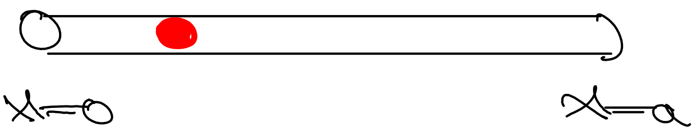
$p(x)$ bezeichnet man dann als diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung. Wir können x auf alle reellen Zahlen fortsetzen, indem wir schreiben

$$p(x) = \begin{cases} 1/6 , & x = 1, 2, \ldots, 6 \\ 0 , & \text{sonst} \end{cases}$$

Solche Funktionen sind aber vor allem nützlich, wenn man kontinuierlich viele mögliche Ereignisse hat.

Beispiel:

Die Position eines Teilchens in einem Röhrchen sei völlig zufällig zwischen den Endpunkten $x=0$ und $x=a$:



Offensichtlich ist dann die WS, das Teilchen in einem kleinen Abschnitt zwischen x und $x+\Delta x$ vorzufinden, überall gleich

$$p([x, x+\Delta x]) = \begin{cases} c\Delta x , & 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

im Grenzübergang $\Delta x \to 0$ schreiben wir:

$$p([x, x+dx]) = c\,dx , \quad 0 \leq x \leq a$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit muß aber 1 sein:

$$\int_0^a c\,dx = ac \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c = \frac{1}{a}$$

Allgemein bezeichnet man die so definierte Funktion $f(x)$, hier

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Es bezeichnet dann $f(x)dx$ die WS, daß x zwischen x und $x+dx$ auftritt.

Eine der bekanntesten Dichtefunktionen ist die Gaußverteilung,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Wenn wir Wahrscheinlichkeiten als Funktion zu einer Variablen betrachten (die dann Zufallsvariable genannt wird), lassen sich statistische Größen berechnen.

Beispiel:

Bei einem Glücksspiel gebe es drei mögliche Ausgänge $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$p(\omega_1) = \frac{1}{4}$, $p(\omega_2) = \frac{1}{2}$, $p(\omega_3) = \frac{1}{4}$

Bei Ausgang ω_1 gewinne man 100 €, bei ω_3 20 € und bei Ausgang ω_2 verliere man 140 €. Sollte man am Spiel teilnehmen?

Wir interessieren uns hier für den Erwartungswert des Gewinns/Verlusts X,

$$E(X) = p(\omega_1)X(\omega_1) + p(\omega_2)X(\omega_2) + p(\omega_3)X(\omega_3)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 100 - \frac{1}{2}\cdot 140 + \frac{1}{4}\cdot 20$$
$$= -160$$

Im Durchschnitt verliert man also Geld. Für kontinuierliche Verteilungen ist

$$E(X) = \int f(x)\,x\,dx,$$

wenn $f(x)$ die Dichtefunktion ist.

Man nennt:

$E(X)$ Mittelwert von $f(x)$

$E([X - E(X)]^2)$ Varianz von $f(x)$