

6. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat in den Anwendungen vor allem zwei Funktionen:

ci) Einerseits will man Situationen, in denen Ereignisse nicht sicher, sondern lediglich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, auftreten mit mathematischen Methoden beschreiben und untersuchen. Diese Aufgabe führt auf die sog. **Wahrscheinlichkeitstheorie** oder **Stochastik**.

cii) Andererseits geht es um die Untersuchung von großen empirischen Datenmengen und die Extraktion von Parametern, etwa die Korrelationen zwischen verschiedenen Größen, aus diesen Datensätzen. Dieser Zweig wird als **mathematische Statistik** bezeichnet.

6.1. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Betrachten wir das "Experiment" eines

mehrfach hintereinander geworfenen Würfels. Es ergibt sich eine Serie von Augenzahlen, z.B.

1, 3, 4, 2, 6, 6, 5, 3, 2, ...

Jeder der 6 **Ausgänge** "1", "2", "3", "4", "5" oder "6" bezeichnet man als **Ergebnis** und die Menge dieser Ausgänge als **Ergebnisraum**.

Falls der Würfel nicht gezinkt ist, ist die **Wahrscheinlichkeit** für jeden der 6 Ausgänge gleich $1/6$.

Definitionen:

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge. Ist dann $\mathcal{P}(\Omega)$ die Menge aller Teilmengen von Ω , so heißt eine Abbildung

$$p: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften

$$(i) \quad p(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$$

(**Nicht-Negativität**)

$$(ii) \quad p(\Omega) = 1 \quad (\text{Normiertheit})$$

$$(iii) \quad p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$$

für $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$
(Additivität)

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion
oder Wahrscheinlichkeitsverteilung über
 $\mathcal{P}(\Omega)$. Ω bezeichnet man als Ergebnis-
raum mit Ergebnissen $\omega \in \Omega$. $\mathcal{P}(\Omega)$
heißt Ereignisraum mit Ereignissen
 $E \in \mathcal{P}(\Omega)$

Beispiele

Betrachten wir wieder das Würfeln.
Der Ergebnisraum ist

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

und der Ereignisraum besteht aus allen
Teilmengen von Ω , also

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{ \{1\}, \{2\}, \dots, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \\ \dots, \{1, 2, 3\}, \dots \}$$

Betrachten wir zum Beispiel die Ereignis-
misse

$$\text{Augenzahl gerade: } E_g = \{2, 4, 6\}$$

$$\text{Augenzahl ungerade: } E_u = \{1, 3, 5\}$$

Die Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse (Ergebnisse) sind

$$p(\{1\}) = \dots = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Daher ist nun

$$p(E_g) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad p(E_u) = \frac{1}{2}.$$

Betrachten wir außerdem die Ereignisse

$$E_g = \{2, 4, 6\}, \quad E_u = \{1, 2, 3\},$$

so ist klar, daß

$$\begin{aligned} p(E_g \cup E_u) &= p(\{1, 2, 3, 4, 6\}) \\ &= \frac{5}{6} \neq p(E_g) + p(E_u) = 1 \end{aligned}$$

aber:

$$\begin{aligned} p(E_g \cup E_u) &= p(E_g) + p(E_u) \\ &\quad - p(E_g \cap E_u = \{2\}), \end{aligned}$$

d.h. es gilt

Satz 2: Für eine WS-Funktion

$$p: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

gilt für $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Andererseits läßt sich etwa fragen, was die WS dafür ist, eine "2" zu werfen, wenn man schon weiß, daß das Ergebnis eine gerade Zahl ist:

$$P(\{2\} | \{2,4,6\}) = \frac{1}{3}.$$

Man spricht hier von der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Offenbar ist:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Satz: bedingte Wahrscheinlichkeit

Für zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ heißt

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Voraussetzung A.

(a) Ist $A \cap B = \emptyset$, so gilt

$$P(B|A) = 0 = P(A|B)$$

(b) Ist $P(A|B) = P(A)$, so heißen

A und B statisch unabhängig
und es ist

$$c') \quad P(B|A) = P(B)$$

$$c'') \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

c) Es gilt

$$P(B) = P(A) P(B|A) + P(\bar{A}) P(B|\bar{A}),$$

wo $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

cd) Es gilt das Bayessche Theorem,

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A)$$

Beweis:

$$cb) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \stackrel{!}{=} P(A)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$cd) \quad P(A) P(B|A) = P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A)$$

□

Beispiele

Eine Variante des Bayesschen Theorems folgt aus cd) mit Hilfe der Identität c):

$$P(A|B) = \frac{P(A) P(B|A)}{P(A) P(B|A) + P(\bar{A}) P(B|\bar{A})}$$

Betrachte nun folgende Situation: eine Krankheit trete bei einem von 10.000 Menschen auf. Ein Bluttest weise die Krankheit mit der WS 99,99% nach. Bei gesunden Menschen liefert der Test allerdings auch in 0,02% der Fälle ein positives Ergebnis. Wie groß ist die WS, daß ein zufällig ausgewählter Mensch mit positivem Ergebnis krank ist?

Sei nun A das Ereignis "Erkrankung" und B das Ereignis "positiver Test", dann ist

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{10000} \cdot \frac{9999}{10000}}{\frac{1}{10000} \cdot \frac{9999}{10000} + \frac{9999}{10000} \cdot \frac{2}{10000}} \approx \frac{1}{3}$$

d.h. trotz der hohen Zuverlässigkeit des Tests ist die Unsicherheit nach dem Test immer noch sehr groß

6.2. Anordnungen u. Kombinationen

Um die WS eines Ereignisses zu bestimmen, muß man häufig die Anzahl

seiner (gleichwahrscheinlichen) Elemente abzählen.

Beispiel:

Wie groß ist die WS in 6 Würfeln die 6 Augenzahlen je genau einmal zu erhalten?

Wir suchen also die Zahl der möglichen Anordnungen der Reihe (1, 2, 3, 4, 5, 6). Für das erste Element hat man 6 Möglichkeiten, für das zweite 5 usw., für das letzte nur noch eine.

Es ist also $n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$ die Zahl der möglichen Anordnungen von n verschiedenen Elementen.

Die gesuchte WS ist also

$$p = \frac{6!}{6^6} \approx 1,5\%.$$

Ähnlich findet man für die Anzahl von Anordnungen von n Elementen, von denen jeweils $n_1, n_2, \dots, n_m$ Elemente untereinander gleich sind:

$$N = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}.$$

Häufig benötigt man auch die Anzahl an Kombinationen der Größe k aus n ver-

Scheidenden Elementen, d.h. Teilmengen ohne Aussehen der Anordnung.

Beispiel:

Beim Lotto suchen wir die Anzahl der möglichen Kombinationen von 6 aus 49 Elementen. Diese Zahl ist allgemein gegeben durch die **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\text{d.h. hier: } \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} \approx 14 \text{ Mio.}$$

6.3. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir hatten Wahrscheinlichkeiten allgemein als Funktionen über dem Ereignisraum definiert. Häufig lassen sich den Ereignissen in natürlicher Weise (reelle) Zahlen zuordnen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit eine Funktion im engeren Sinne.

Für das Würfeln können wir die Ausgänge von 1 bis 6 durchnummerieren und nennen etwa x die Anzahl der Augen in einem Wurf:

$$p(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \dots, 6$$

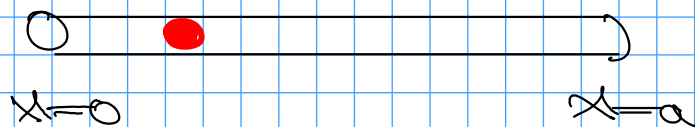
$p(x)$ bezeichnet man dann als diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung. Wir können x auf alle reellen Zahlen fortsetzen, indem wir schreiben

$$p(x) = \begin{cases} 1/c, & x = 1, 2, \dots, b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Solche Funktionen sind aber vor allem nützlich, wenn man kontinuierlich viele mögliche Ereignisse hat.

Beispiel:

Die Position eines Teilchens in einem Röhren sei völlig zufällig zwischen den Endpunkten $x=0$ und $x=a$:



Offensichtlich ist dann die Wk, das Teilchen in einem kleinen Abschnitt zwischen x und $x+\Delta x$ vorzufinden, überall gleich

$$p(x, x+\Delta x) = \begin{cases} c\Delta x, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

im Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ schreiben wir:

$$p(x, x+dx) = cdx, \quad 0 \leq x \leq a$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit muß aber 1 sein:

$$\int_0^a c dx = ac \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c = \frac{1}{a}$$

Allgemein bezeichnet man die so definierte Funktion $f(x)$, hier

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

als **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion**. Es bezeichnet dann $f(x)dx$ die WS, daß x zwischen x und $x+dx$ auftritt.

Eine der bekanntesten Dichtefunktionen ist die **Gaußverteilung**.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Wenn wir Wahrscheinlichkeiten als Funktionen einer Variablen betrachten (die dann **Zufallsvariable** genannt wird), lassen sich **statistische Größen** berechnen.

Beispiele

Bei einem Glücksspiel gebe es drei mögliche Ausgänge w_1, w_2, w_3 mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p(w_1) = \frac{1}{4}, \quad p(w_2) = \frac{1}{2}, \quad p(w_3) = \frac{1}{4}$$

Bei Ausgang w_1 gewinne man 100€, bei w_3 20€ und bei Ausgang w_2 verliere man 140€. Sollte man am Spiel teilnehmen?

Was interessieren uns hier für den **Erwartungswert** des Gewinns/Verlusts x ,

$$\begin{aligned} E(x) &= p(w_1) \cdot x(w_1) + p(w_2) \cdot x(w_2) \\ &\quad + p(w_3) \cdot x(w_3) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 100 - \frac{1}{2} \cdot 140 + \frac{1}{4} \cdot 20 \\ &= -160 \end{aligned}$$

Im Durchschnitt verliert man also Geld.
Für kontinuierliche Verteilungen ist

$$E(x) = \int f(x) \cdot x \, dx,$$

wenn $f(x)$ die Dichtefunktion ist.

Man nennt:

$E(x)$ **Mittelwert** von $f(x)$

$E([x - E(x)]^2)$ **Varianz** von $f(x)$