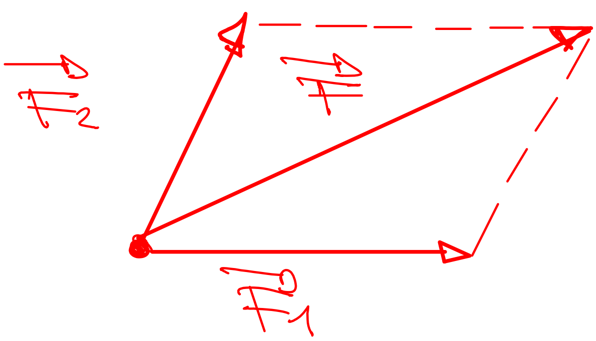
5. Lineare Algebra

In der Schule haben Sie sich in bestimmtem Umfang mit dem Rechnen mit Vektoren und (eventuell) Matrizen befaßt, meist im Zusammenhang mit der sog. „analytischen Geometrie". Dahinter steckt jedoch ein wesentlich größeres Gebiet, die sog. lineare Algebra, die wir hier nur in wenigen Anfängen behandeln können. Genaueres muß wieder auf die Mathematikvorlesungen verschoben werden.

5.1. Vektorrechnung

Im Physikunterricht betrachten wir häufig sog. vektorielle Größen, d.h. Objekte, die neben einer Größe im engeren Sinne auch eine Richtung haben, z.B. Kräfte oder Geschwindigkeiten.

Diese stellen wir durch Pfeile in der Ebene bzw. im dreidimensionalen Raum dar:



Bezüglich eines bestimmten Koordinaten-systems schreiben wir Vektoren üblicherweise als Spalten von Zahlen:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{etc.}$$

und rechnen mit diesen Objekten komponentenweise:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Solche Objekte wollen wir nun in einer etwas formaleren Weise beschreiben.

Definition:

Eine Menge $V \neq 0$ heißt ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (oder über $\mathbb{C}$), wenn zwischen Elementen $x, y \in V$ eine Addition $x+y$ und zwischen Elementen $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$ eine Skalarmultiplikation $\lambda x \in V$ definiert sind, so daß gilt:

(V1) $(x+y)+z = x+(y+z)$

(V2) $x+y = y+x$

(V3) $\exists\, 0 \in V : x+0 = x \quad \forall x \in V$

(V4) $\forall x \in V \; \exists -x \in V: \; x + (-x) = 0$

(V5) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

(V6) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$

(V7) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

(V8) $1 \cdot x = x, \quad 0 \cdot x = 0$

Beispiel:

Die oben verwendeten Objekte, also

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

bilden also, wie man sich leicht überzeugen kann, einen solchen Vektorraum, aber es gibt auch viele andere Beispiele, die nicht im üblichen Sinne wie Vektoren aussehen.

Betrachte z.B. die Menge der Funktionen $f: I \to \mathbb{R}$ für ein bestimmtes festes Intervall I. Diese Menge bildet bzgl. der punktweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren einen Vektorraum.

$$f_1(x) = x^2 + 2, \quad f_2(x) = \cos x$$

$$\Longrightarrow f(x) = 2f_1(x) + 3f_2(x)$$
$$= 2x^2 + 4 + 3\cos x$$

etc.

Um mit Vektorräumen arbeiten zu können, brauchen wir einige weitere Begriffe.

<u>Definition:</u>

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $a_1, \ldots, a_n \in V$.

(a) Für feste $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ heißt der Vektor

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$$

eine Linearkombination von $a_1, \ldots, a_n$ und die Menge

$$LH(a_1, \ldots, a_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \,\middle|\, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt lineare Hülle von $a_1, \ldots, a_n$.

(b) $a_1, \ldots, a_n$ heißen linear unabhängig über $\mathbb{R}$, wenn

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Andernfalls heißen sie linear abhängig über $\mathbb{R}$.

Beispiel:

Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ betrachte die Vektoren

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die lineare Hülle ist

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

d.h. die Menge aller Vektoren aus $\mathbb{R}^2$.

$\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ sind linear unabhängig, denn

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0$$

Eine solche Menge von Vektoren nennt man eine Basis des Vektorraums:

Definition:

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Menge

$\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq V$ heißt Basis von V, wenn

(a) $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig sind;

(b) $a_1, \ldots, a_n$ spannen V auf, d.h.

$$LH(a_1, \ldots, a_n) = V.$$

Eine solche Basis ist natürlich nicht eindeutig. Für den Vektorraum

$$V = \mathbb{R}^2$$

betrachte etwa:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Und:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

$\Longrightarrow \quad a_x = \lambda_1 + \lambda_2, \quad a_y = \lambda_1 - \lambda_2$

$$\lambda_1 = \frac{a_x + a_y}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_x - a_y}{2},$$

d.h. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ spannen $\mathbb{R}^2$ auf.

Es hat jedoch jede Basis die gleiche Anzahl von Elementen:

<u>Satz:</u> Der Vektorraum V werde von m Vektoren aufgespannt.

(a) Jedes System von $n > m$ Vektoren in V ist linear abhängig.

(b) Ist $M \subseteq V$ eine Teilmenge mit einem System $\mathcal{A}$ von linear unabhängigen Vektoren aus $U := LH(M)$, so gibt es eine endliche Basis $\mathcal{B}$ des Vektorraums U mit

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cup M$$

Mit anderen Worten: man kann das linear unabhängige System $\mathcal{A}$ durch Vektoren aus M zu einer Basis ergänzen.

(c) V besitzt eine Basis.

(d) Alle Basen von V haben dieselbe Elementezahl.

Beweis:

(a) und (b) lassen sich mit Methoden für lineare Gleichungssysteme beweisen, die wir später behandeln.

(c) folgt direkt aus (b)

(d) Seien $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basen von V mit n_1 bzw. n_2 Elementen. Nach (a) ist dann

$$n_1 \leq n_2,$$

aber auch $n_2 \leq n_1$ und daher

$$n_1 = n_2.$$

Definition:

Wenn sich der $\mathbb{R}$-Vektorraum V von endlich vielen Vektoren aufspannen läßt, so bezeichnet man die Elementezahl einer Basis als Dimension von V. Andernfalls heißt V unendlich-dimensional.

Beispiele:

(a) Nach den vorherigen Überlegungen ist die Dimension von $\mathbb{R}^2$ zwei. Man schreibt

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

(b) Weiter oben in Kapitel 3 hatten wir festgehalten, daß sich jede komplex-analytische Funktion $f(z)$ in eine Potenzreihe entwickeln läßt, d.h.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Betrachten wir also den Vektorraum

$$C^\infty(\mathbb{C})$$

der holomorphen Funktionen

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

so wird er offenbar von den unendlich vielen Vektoren

$$a_k(z) = z^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

aufgespannt. $C^\infty(\mathbb{C})$ ist also ein unendlich-dimensionaler Vektorraum.

(c) Betrachten wir allgemeiner den Vektorraum

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n)^T \mid x_k \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

so hat $\mathbb{R}^n$ insbesondere die Basis

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^T$$

$$\vdots$$

$$\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)^T,$$

die man als Standardbasis oder kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Man schreibt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^T = (a_1, \ldots, a_n)$$

und nennt $\vec{a}$ Spaltenvektor und $\vec{a}^T$ Zeilenvektor. Diese sind lediglich unterschiedliche Schreibweisen für dasselbe Objekt, die später im Rahmen der Matrizenrechnung klar werden.

Basen in Vektorräumen haben die wichtige Funktion, abstrakte Elemente eines Vektorraums durch konkrete

Zahlen zu beschreiben.

Satz:

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann gilt: jeder Vektor $x \in V$ ist eine eindeutige Linearkombination von $b_1, \dots, b_n$.

Beweis:

Nehmen wir an, es gäbe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und $\beta_1, \dots, \beta_n$, so daß

$$\sum_k \alpha_k b_k = x = \sum_k \beta_k b_k$$

$$\Longrightarrow \sum_k (\alpha_k - \beta_k) b_k = 0$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der b_k folgt dann

$$\alpha_k = \beta_k \quad \forall k$$

$\square$

Daher definieren wir den Begriff der Koordinaten:

Definition:

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V

und $x \in V$. Dann heißen die Zahlen $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i = x$$

die Koordinaten von x bzgl. B und der Vektor

$$X = x^B = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der Koordinatenvektor von x bzgl. B.

Beispiele:

(a) Das besondere an der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$ ist, daß der Koordinatenvektor zu einem $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ einfach der Vektor $\vec{x}$ selbst ist.

(b) Betrachten wir die oben eingeführten Basen von $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{e}_1 = (1,0)^T, \quad \vec{e}_2 = (0,1)^T$$

und

$$\vec{b}_1 = (1,1)^T, \quad \vec{b}_2 = (1,-1)^T$$

Für den Vektor $(2,3) \in \mathbb{R}^2$ ist der Koordinatenvektor bzgl. $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ gerade

$$x^E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Andererseits ist der Koordinatenvektor bzgl. $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$ gegeben durch

$$x^B = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

denn es ist:

$$x_1 = \frac{a_x + a_y}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

und $$x_2 = \frac{a_x - a_y}{2} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Offensichtlich entspricht also eine Basis der geometrischen Vorstellung eines Koordinatensystems. Wie sich die Koordinaten eines Vektors zwischen verschiedenen Koordinatensystemen (d.h. Basen) transformieren, sehen wir später im Rahmen der Matrizenrechnung.

Im $\mathbb{R}^n$ definiert man ein Skalarprodukt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$
mit den Eigenschaften

$$\vec{x} \cdot (\lambda \vec{y} + \mu \vec{z}) = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \mu (\vec{x} \cdot \vec{z})$$
$$\vec{y} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$$

Für allgemeine Vektorräume schreiben wir:

Definition:

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum heißt ein Prähilbertraum (PHR), wenn für alle $x, y \in H$ ein Skalarprodukt $\langle x | y \rangle \in \mathbb{R}$ definiert ist, so daß gilt:

(S1) $\langle y | x \rangle = \langle x | y \rangle$

(S2) $\langle x | \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle x | z \rangle$

(S3) $\langle x | x \rangle \geq 0, \quad \langle x | x \rangle = 0 \iff x = 0$

Mit Hilfe des Skalarprodukts können wir in einem Vektorraum Längen und Winkel einführen, so daß die bekannten Gesetze der euklidischen Geometrie gelten.

Satz: In jedem PHR H gilt die

Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle \quad \forall x,y$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis:

Aus den Eigenschaften des Skalarproduktes folgt

$$0 \leq \langle x+\lambda y|x+\lambda y\rangle$$

$$= \langle x|x\rangle + 2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\langle y|y\rangle$$

und speziell für

$$\lambda = -\frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle}$$

folgt:

$$0 \leq \langle x|x\rangle - 2\frac{|\langle x|y\rangle|^2}{\langle y|y\rangle} + \frac{|\langle x|y\rangle|^2}{\langle y|y\rangle}$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$$

$\square$

Beispiel:

Für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ ist

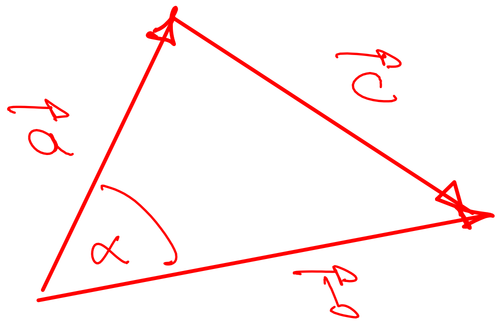
$$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq (\vec{x}\cdot\vec{x})(\vec{y}\cdot\vec{y})$$

Aus der Schule wissen wir, daß

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\alpha,$$

wo α der Winkel zwischen $\vec{x}$ u. $\vec{y}$.

Zum Beweis betrachte drei Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:



Aus dem Kosinussatz folgt

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

und daher mit $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$:

$$(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

Daher ist die Schwarzsche Ungleichung

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2\cos^2\alpha$$

$$\leq (\vec{x}\cdot\vec{x})(\vec{y}\cdot\vec{y}) = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos^2\alpha \leq 1$$

für dieses Skalarprodukt erfüllt.

An diesem Beispiel haben wir auch gesehen, wie das Skalarprodukt zur Definition einer Norm verwendet werden kann. Allgemein sagen wir:

Satz:

Jeder PHR ist ein normierter linearer Raum (NLR) mit der Norm

$$|x| := \sqrt{\langle x | x \rangle},$$

d.h. die Abbildung $H \to \mathbb{R} : x \to |x|$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$\text{(N1)} \quad |x| \geq 0, \quad |x| = 0 \iff x = 0$$

$$\text{(N2)} \quad |\lambda x| = |\lambda| \, |x|$$

$$\text{(N3)} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

(Dreiecksungleichung)

Beweis:

(N1) und (N2) sind trivial. (N3) folgt aus der Schwarzschen Ungleichung.

Beispiele:

Auch wenn man zunächst an die euklidische Norm

$$|x| = |x|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2}$$

denkt, so lassen sich doch auch andere Normen definieren, z.B.

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

oder

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| ,$$

die in der Analysis häufig verwendet werden.

Für das euklidische Skalarprodukt ist

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \cos\alpha$$

und daher

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \iff \vec{x} \perp \vec{y}$$

Allgemein definiert man:

<u>Definition:</u>

(a) $x, y \in H$ heißen orthogonal, wenn $\langle x | y \rangle = 0$.

(b) Eine Menge von Vektoren $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq H$ heißt Orthogonalsystem, wenn

$$\langle x_i | x_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

und **Orthonormalsystem** (ONS), wenn

$$\langle x_i | x_j \rangle = \delta_{ij}$$

(c) Eine Basis $\mathcal{B}$ von H, die ein ONS ist, heißt **Orthonormalbasis** (ONB) von H.

<u>Exkurs:</u> **Kronecker-Delta**

Für $i,j = 0,1,2,\ldots \in \mathbb{N}$ definiert man

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1, & i=j \\ 0, & i=j \end{cases}$$

und nennt δ_{ij} Kroneckersymbol.

Solche Orthonormalbasen sind sehr nützlich, denn für sie lassen sich die Koordinaten leicht berechnen, denn es gilt:

<u>Satz:</u> Sei $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine ONB v. H.

(a) Jedes $x \in H$ hat die eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k | x \rangle e_k$$

mit den sog. **Fourierkoeffizienten**

$\xi_k = \langle e_k | x \rangle$ als Koordinaten.

(b) Für $x, y \in H$ gilt:

$$\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k | x \rangle \langle e_k | y \rangle$$

Beweis:

Seien ξ_k die eindeutigen Koordinaten von x bzgl. B, d.h.

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$$

Dann ist:

$$\langle e_k | x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \langle e_k | e_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \delta_{jk} = \xi_k$$

$\square$

Insbesondere können wir also für jede ONB das (allgemeine) Skalarprodukt in der aus dem Euklidischen gewohnten Form über die Koordinaten ausrechnen.

Beispiel:

Betrachten wir wieder die oben eingeführten Basen des $\mathbb{R}^2$:

$$E = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$$

$$B = \{(1,1)^T, (1,-1)^T\}$$

Es ist

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$
$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

und

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$
$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Daher ist E eine ONB von $\mathbb{R}$, B ist zwar eine OGB, aber keine ONB. Wir können B aber in eine ONB verwandeln:

$$\vec{b}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Vektors $(2,3) \in \mathbb{R}^2$ bezgl. E sind

$$x^E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

die Koordinaten bezgl. B' sind

$$x_1^{B'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$x_2^{B'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad x^{B'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren können wir nun über die Koordinaten berechnen, z.B. $a = (2,3)$, $b = (1,1)$:

Basis E: $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 5$

Basis B': $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 5.$

Während alle bisherigen Überlegungen für beliebige Vektorräume galten, insbesondere für den $\mathbb{R}^n$ mit beliebigem $n \geq 1$, existiert für den Spezialfall des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ eine zusätzliche Struktur, die in den Anwendungen recht bedeutsam ist.

Definition:

Seien

$$\vec{A} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Dann definiert man das Vektorprodukt $\vec{A}\times\vec{B} \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Ferner definiert man für $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{R}^3$ das sogenannte Spatprodukt

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}).$$

Diese Produkte haben die folgenden, leicht zu verifizierenden Eigenschaften:

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}, \quad \vec{A}\times\vec{A} = 0$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = 0 \iff \vec{A}, \vec{B} \text{ linear abhängig}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} \perp \vec{A}, \quad \vec{A}\times\vec{B} \perp \vec{B}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

Um weitere Eigenschaften des Vektorprodukts herzuleiten, ist die folgende Darstellung nützlich.

Satz: Sei

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \operatorname{sign}(ijk) = \begin{cases} +1 & \text{f. } (123), (312), (231) \\ -1 & \text{f. } (213), (321), (132) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.$$

(b) Für $A, B \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\vec{A}\times\vec{B})_k = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j$$

Damit gilt nun folgender

<u>Satz:</u>

Für $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}),$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

und insbesondere

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2$$

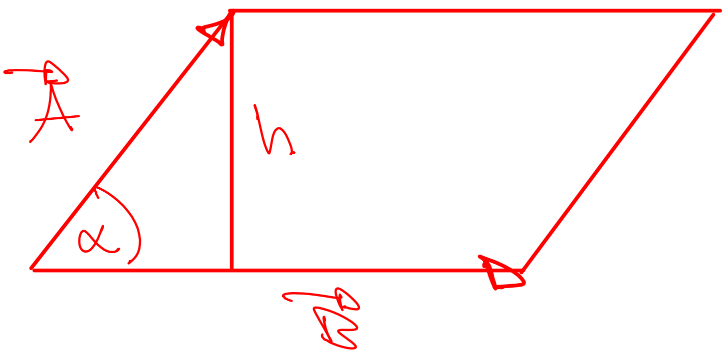
Das Vektorprodukt ist u.a. zur Flächenberechnung nützlich, denn es gilt folgende Beziehung:

Ist α der von $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ eingeschlossene Winkel, so gilt:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha$$

Betrachte folgendes Parallelogramm:



Die Fläche ist

$$S = |\vec{B}|\,h = |\vec{B}|\,|\vec{A}| \sin\alpha$$

Entsprechend ist $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ das Volumen des von $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ aufgespannten Parallelotops.

Das Vektorprodukt tritt in der Physik und Technik an vielen Stellen auf, etwa beim Drehimpuls sowie der Bewegung von Elektronen in einem magnetischen Feld.

5.2. Matrizen und lineare Gleichungssysteme

In der analytischen Geometrie betrachten wir oft Schnitte von Geraden oder Ebenen. Solche Probleme führen natürlicherweise auf den Begriff einer Matrix.

Betrachte z.B. die Geraden

$$G_1 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}t,\ \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$G_2 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} = \vec{c} + \vec{d}t,\ \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^2 \}$$

Diese Geraden schneiden sich offenbar, wenn gilt:

$$\vec{a} + \vec{b}t_1 = \vec{c} + \vec{d}t_2,$$

oder

$$\vec{b}t_1 - \vec{d}t_2 = \vec{c} - \vec{a},$$

d.h.

$$b_1 t_1 - d_1 t_2 = c_1 - a_1$$

$$b_2 t_1 - d_2 t_2 = c_2 - a_2$$

Es bietet sich dann an, dieses System von Gleichungen in der folgenden kompakten Form zu schreiben:

$$A\vec{t} = \vec{f},$$

wobei $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}$

und

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} b_1 & -d_1 \\ b_2 & -d_2 \end{pmatrix},$$

wobei man nun $\underline{A}$ als 2×2-Matrix bezeichnet.

Allgemeiner schreiben wir:

Definition:

Ein rechteckiges Schema

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

von Elementen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ heißt eine $m\times n$ - Matrix mit den m Zeilenvektoren

$$A_i = (a_{i1}, \ldots, A_{in}), \quad i = 1, \ldots, m$$

und den n Spaltenvektoren

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n$$

Es bezeichnet $\mathbb{R}^{m\times n}$ die Menge aller

$m \times n$ - Matrizen.

(a) In $\mathbb{R}^{m \times n}$ definiert man eine Addition

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $A+B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und eine Skalarmultiplikation durch

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $\lambda A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(b) In $\mathbb{R}^{m \times n}$ definiert man die zu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ transponierte Matrix

$$A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

indem man Zeilen und Spalten vertauscht.

(c) Ist $m = n$, so heißen die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadratisch. Dabei heißt

$$E = E_n = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

die $n \times n$-Einheitsmatrix.

(d) Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

$$\operatorname{Spur} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die Spur der Matrix A.

(e) Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ definiert man das Matrizenprodukt $C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ durch

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Es ist klar, dass $\mathbb{R}^{m \times n}$ bzgl. der Addition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum bildet:

<u>Satz:</u> $\mathbb{R}^{m \times n}$ bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Nullmatrix $O_{m \times n} = (O_{ij})$, $O_{ij} = 0 \ \forall i,j$ als Nullvektor.

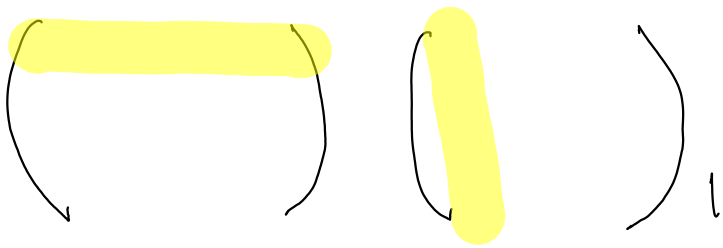
<u>Anmerkungen:</u>

(a) Das Matrizenprodukt ist nur dann definiert, wenn

Zeilenzahl von A = Spaltenzahl von B

und das Ergebnis hat die Spaltenzahl von A und die Zeilenzahl von B.

(b) Die Anweisung für die Ausführung des Matrizenprodukts setzt man wie folgt praktisch um.

$A \cdot B =$  ,

d.h. für den Eintrag c_{ij} der Ergebnismatrix multipliziert man die Elemente der i-ten Zeile von A paarweise mit den Einträgen der j-ten Spalte von B und summiert die einzelnen Produkte.

Betrachte etwa das Produkt der folgenden Matrizen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}_{2\times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}_{3\times 2}} = \begin{pmatrix} 1+6+15 & 2+8+18 \\ 4+15+30 & 8+20+36 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}$$

(c) Im allgemeinen ist höchstens eines der Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ definiert. Sind beide definiert, so haben $A \cdot B$ und $B \cdot A$ i.A. verschiedenen Typ.

(d) Das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ, d.h. selbst wenn $A \cdot B$ und $B \cdot A$ vom gleichen Typ gilt i.A.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

(e) Ferner ist das Matrizenprodukt entartet, d.h. es gibt $A, B \neq 0$, so daß

$$A \cdot B = 0$$

Betrachte z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Trotz dieser Abweichungen des Matrizenprodukts vom „üblichen" hat es einige wichtige (und teilweise bekannte) Eigenschaften.

Satz:

(a) Matrizenmultiplikation ist assoziativ, d.h. für $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{n \times q}$ gilt:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

(b) Matrizenmultiplikation und -addition sind distributiv, d.h.

(i) für $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ und $B, C \in \mathbb{R}^{m \times q}$ gilt:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

(ii) für $A, B \in \mathbb{R}^{p \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$ gilt:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

(c) Für die Transposition gilt: Sind $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$, so ist

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

(d) Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

$$\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA).$$

Beweis:

Die Beweise folgen jeweils direkt aus der Definition des Matrizenprodukts. Wir betrachten hier lediglich (d):

$$\operatorname{Spur} AB = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \right)$$
$$= \operatorname{Spur} BA$$

$\square$

Wir wollen jetzt zum anfänglich betrachten linearen Gleichungssystem zurückkehren. Allgemein betrachten wir ein inhomogenes lineares Gleichungssystem (LGS),

$$(L) \quad \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

und das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem,

$$(L_0) \quad \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

In Matrixschreibweise haben wir:

(L) $\quad Ax = b$ bzw.

(L$_0$) $\quad Ax = 0$,

wo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Koeffizientenmatrix und $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Es fragt sich nun, unter welchen Bedingungen (L) oder (L$_0$) (eine oder mehrere) Lösungen haben und wie diese gegebenenfalls zu bestimmen sind.

Dazu schreiben wir zunächst (L) und (L$_0$) noch in einer etwas anderen Form,

$$(L) \quad x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n = b$$

$$(L_0) \quad x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n = 0,$$

wo $A^k = (a_{1k}, \ldots, a_{mk})^T$ der k-te Spaltenvektor von A. Es stehen also auf der linken Seite jeweils Linearkombinationen der Spaltenvektoren A^k.

Daher gilt folgender

Satz:

(a) (L$_0$) hat immer die triviale Lösung $x = 0$. (L$_0$) hat genau dann nicht-triviale Lösungen $x \neq 0$, wenn die Spaltenvektoren A^k linear abhängig sind.

(b) Die Lösungen von (L_0) bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, d.h. Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen.

(c) (L) ist genau dann lösbar, wenn B linear abhängig von den Spaltenvektoren A^k ist.

(d) Die Differenz zweier Lösungen von (L) ist eine Lösung von (L_0), d.h. man bekommt alle Lösungen von (L), indem man zu einer Lösung von (L) alle Lösungen von (L_0) addiert.

Die praktische Lösung eines LGS erfolgt mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Dieses geht von der Beobachtung aus, daß man jederzeit ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren kann ohne die Lösungsmenge zu ändern.

Man schreibt dazu das System (L) als erweiterte Matrix

$$(A, B) = (A^1, \ldots, A^n, B)$$

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	β
z_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
z_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
z_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m

Dann geht man nach folgendem Algorithmus vor:

(1) Ist $a_{11} = 0$, so vertausche man Zeilen bis $a_{11} \neq 0$ (sind alle $a_{k1} = 0$, so kann man die Variable x_1 entfernen). Dann addiert man Vielfache von z_1 zu den Zeilen $z_2, \ldots, z_m$, so dass dort auf den Plätzen $(2,1), (3,1), \ldots$ Nullen entstehen.

(2) Man addiert nun Vielfache der Zeile z_2 zu den Zeilen $z_3, \ldots, z_m$, so dass dort auf den Plätzen $(3,2), (4,2), \ldots$ Nullen entstehen.

(3) Diesen Prozeß iteriere man bis zum n-ten Schritt. Es resultiert ein System der Form

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	b
z_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
z_2	0	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$					$\vdots$
z_m	0	0	$\dots$ $a_{m,n-m}$ $\dots$	a_{mn}	b_m

Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(a) Ist $a_{m,n-m} = a_{m,n-m+1} = \dots = a_{mn} = 0$, aber $b_m \neq 0$, so gibt es keine Lösung.

(b) Ist $a_{mk} \neq 0$ für ein $n-m \leq k \leq n$, dann ist

$$x_k = \frac{1}{a_{mk}} \left(b_m - a_{m,k+1} x_{k+1} - \dots - a_{mn} x_n \right)$$

Dabei sind $x_{k+1}, \dots, x_n$ freie Parameter. Die Werte der anderen Variablen bestimmt man dann durch sukzessives Einsetzen in die jeweils darüberstehende Gleichung.

Beispiele:

Betrachten wir das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
x_1 + 5x_2 + 4x_3 \phantom{{}+3x_4} &= 1 \\
x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\
x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

In Matrixschreibweise:

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 5 & 4 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\
1 & 7 & 2 & 6 & 3 \\
\hline
1 & 5 & 4 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\
0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\
\hline
1 & 5 & 4 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

D.h., man kann x_3 und x_4 beliebig wählen und erhält f. x_2 und x_1:

$$x_2 = 1 + x_3 - 3x_4$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 - 5x_2 - 4x_3 \\
&= -4 - 9x_3 + 15x_4
\end{aligned}
$$

Für das LGS

$$
\begin{aligned}
x_1 + 5x_2 + 4x_3 \phantom{{}+3x_4} &= 1 \\
x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\
x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

bekommt man:

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 5 & 4 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\
1 & 7 & 2 & 6 & 3 \\
\hline
1 & 5 & 4 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\
0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\
\hline
1 & 5 & 4 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
\hline
\end{array}
$$

Daher gibt es für das System keine Lösung.

Man kann zeigen, daß sich die Lösungen eines LGS mit diesem Verfahren immer bestimmen lassen. Zur allgemeinen Bestimmung der Lösbarkeit, ist es nützlich, den Begriff der Determinante einzuführen:

Definition:

Für $A = (A^1, \ldots, A^n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Determinante von A,

$$\det A = \det(A^1, \ldots, A^n) = |A| \in \mathbb{R}$$

induktiv wie folgt definiert:

(a) Für $n=1$ ist $|A|:=a_{11}$. Für $n=2$ ist

$$|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

(b) Für $n \geq 2$ definiert man

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} \cancel{a_{11} \cdots a_{1k} \cdots a_{1n}} \\ a_{21} \cdots a_{2k} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nk} \cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

d.h. man streicht die erste Zeile und die k-te Spalte und berechnet jeweils die Determinante der verbleibenden $(n-1)$-dimensionalen Matrix.

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3-2) - 2(9-8)$$

$$= +1 - 2 = -1$$

Für Determinanten gelten einige wichtige

Rechenregeln.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix.

(a) $\det A = \det(A^1, \ldots, A^n)$ ist homogen in jedem Argument A^i,

$$|A^1, \ldots, \lambda A^i, \ldots, A^n| = \lambda |A|$$

(b) $\det A$ ist additiv in jedem Argument A^i,

$$|A^1, \ldots, B^i + C^i, \ldots, A^n| =$$
$$|A^1, \ldots, B^i, \ldots, A^n| + |A^1, \ldots, C^i, \ldots, A^n|$$

(c) $\det A$ ist alternierend in A^i,

$$|A^1, \ldots, B, \ldots, C, \ldots, A^n| = -|A^1, \ldots, C, \ldots, B, \ldots, A^n|$$

(d) $|A^1, \ldots, A^n| = 0$, wenn $A^i = A^j$ für zwei Indizes i, j.

(e) $|A^1, \ldots, A^n| = 0$, wenn $A^1, \ldots, A^n$ linear abhängig.

(c) $\det A$ ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte eine Linearkombination der anderen Spalten addiert.

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist der folgende

Satz: (Determinanten-Multiplikationssatz)

Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Determinanten sind nun vor allem wichtig, um das Konzept der inversen Matrix einzuführen. Für das LGS

$$Ax = B$$

können wir formal eine Lösung angeben:

$$x = A^{-1} B,$$

sofern wir eine passende inverse Matrix definieren können.

Man kann zeigen:

Satz: (inverse Matrix)

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0$ existiert eine eindeutig bestimmte inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Es ist: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, falls $\det A \neq 0$ und $\det B \neq 0$.

Aus der Bedingung $\det A \neq 0$ können wir nun auf die Bedingungen für die Lösbarkeit von (L) und (Lo) im Falle quadratischer $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zurückschließen.

<u>Satz:</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

(a) Wenn $\det A \neq 0$, dann hat das inhomogene System

$$(L) \qquad Ax = B$$

die eindeutige Lösung $x = A^{-1}B$.

(b) Das homogene System

$$(Lo) \qquad Ax = 0$$

hat genau dann nur die triviale Lösung $x = 0$, wenn $\det A \neq 0$ ist.

Die Determinante hilft uns also, über die lineare (Un-)Abhängigkeit der Zeilen und Spalten einer Matrix zu entscheiden:

$\det A \neq 0 \iff$ die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig $\iff$ die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig

Für LGS mit nicht-quadratischen Matrizen gilt nun allgemein:

<u>Satz:</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beliebig.

(a) Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen o. Spalten von A heißt Rang von A, rg A.

(b) Das inhomogene LGS

$$(L) \qquad Ax = B, \quad B \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

ist genau dann lösbar, wenn

$$rg(A, B) = rg(A)$$

(c) Das homogene LGS

$$(L_0) \qquad Ax = 0$$

mit $rg A = r$ hat $n-r$ linear unabhängige Lösungen $x_0^1, \dots, x_0^{n-r}$ und die allgemeine Lösung ist

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n-r} \alpha_j x_0^j$$

(d) Ist $rg(A, B) = rg(A)$, so ist die allgemeine Lösung von (L)

$$x = x_p + \sum_{j=1}^{n-r} \alpha_j x_0^j,$$

wo x_p eine spezielle Lösung von (L).

Wir erwähnen noch kurz zwei Anwendungen von Matrizen u. Determinanten in der Vektorrechnung.

(a) Wir hatten zuvor die Koordinaten eines Vektors bzgl. verschiedener Basen untersucht. Hat man nun zwei Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und sind X und X' die Koordinaten von x bzgl. $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$, so gilt

$$X' = AX \quad \text{und} \quad X = A^{-1}X',$$

mit einer sogenannten Transformationsmatrix A. Dies ist ein Spezialfall einer sog. linearen Abbildung, einem wichtigen Thema in den späteren Algebravorlesungen.

(b) Das Vektorprodukt und das Spatprodukt von Vektoren lassen sich auch mit Hilfe von Determinanten schreiben:

$$A \times B = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

und $$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$