# 4. Integralrechnung

Die Integralrechnung hat zwei hauptsächliche Anwendungsgebiete:

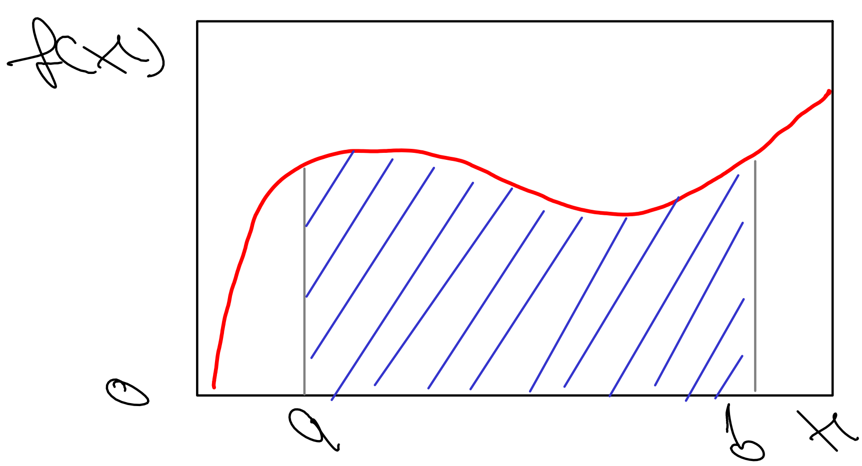
(1) Flächenmessung

(2) Umkehrung der Differentiation

Wir befassen uns zunächst mit dem ersten Problem und werden danach sehen inwieweit das so eingeführte Integral als Umkehrung der Ableitung dienen kann.

## 4.1. Das Riemannintegral

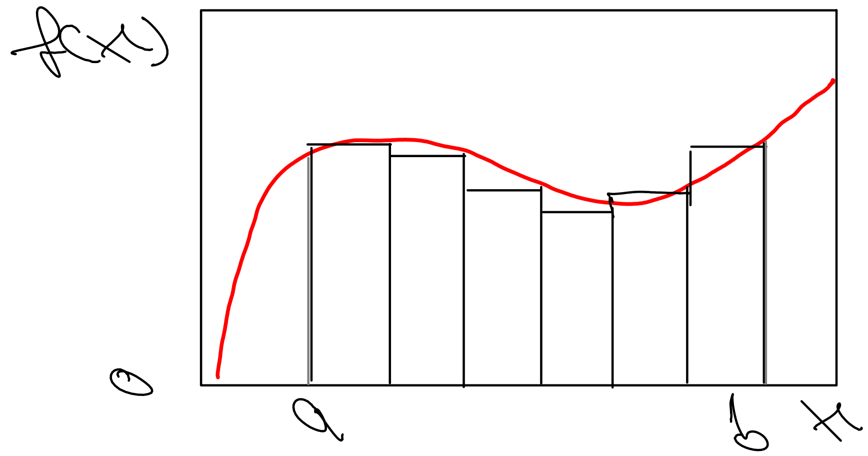
Wir wollen den Flächeninhalt unter einer gegebenen Kurve bestimmen:




Wir suchen also den Inhalt von

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Die Riemannsche Idee ist die Approximation des Flächeninhalts durch eine Summe von Rechtecken, d.h. eine Konstruktion der folgenden Form:




Betrachten wir zunächst ein Beispiel:

Zur Bestimmung der Fläche unter der Parabel $f(x) = x^2$ zwischen $a=0$ und $b$ zerlegen wir $[0,b]$ in $n$ Streifen der Breite $h$. Die Fläche des $k$-ten Rechtecks ($k = 0, \ldots, n-1$) ist

$$A_k = h\,(kh)^2 = h^3 k^2$$

Daher ist die Gesamtfläche

$$A^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k = h^3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = h^3 \, \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

wie man durch vollständige Induktion leicht beweist.

Mit $h = \frac{b}{n}$ folgt:

$$A^{(n)} = \left(\frac{b^3}{n^3}\right)\frac{n}{6}(n-1)(2n-1)$$
$$= \frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

Im Limes einer feiner werdenden Unterteilung ergibt sich:

$$A = \lim_{n\to\infty} A^{(n)} = \frac{b^3}{3}$$

Wir wollen diesen Ansatz nun formalisieren. Dazu approximieren wir die gesuchte Fläche „von unten" und „von oben". Wenn beide Varianten gegen den gleichen Grenzwert streben, haben wir den gesuchten Flächeninhalt bestimmt.

**Definition:**

Für ein Intervall $I = [a,b]$ heißt

$$Z = (x_0, \ldots, x_r)$$

mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Für eine beschränkte Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei

$$m_k = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\},$$
$$M_k = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}.$$

Definiert man nun

$$\underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \,,$$

Untersumme von f

$$\overline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \,,$$

Obersumme von f

so nennt man

$$U(f) \equiv \sup\{\underline{S}_Z(f) \mid Z \in \mathcal{Z}[a,b]\}$$

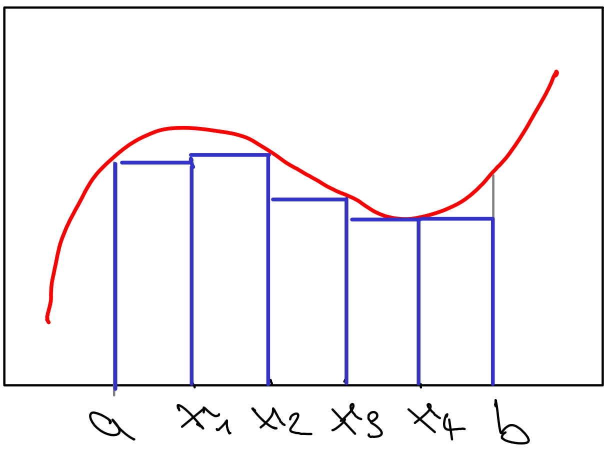
das Unterintegral von f

und

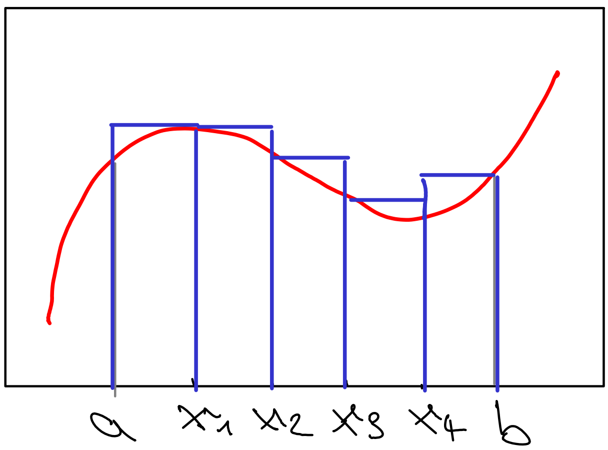
$$O(f) \equiv \inf\{\overline{S}_Z(f) \mid Z \in \mathcal{Z}[a,b]\}$$

das Oberintegral von f,

wobei $\mathcal{Z}[a,b]$ die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$ bezeichnet.




Untersumme




Obersumme

Damit können wir definieren:

**Definition:** Eine beschränkte Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt riemann-integrierbar, wenn das Unterintegral gleich dem Oberintegral ist. Man schreibt dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = U(f) = O(f)$$

Man setzt: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Die Menge der riemannintegrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}([a,b])$.

Definiert man die Feinheit der Zerlegung $Z$ als

$$\ell(Z) = \max_{k=1,\dots,n} (x_k - x_{k-1}),$$

so gilt:

**Satz:** (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Eine beschränkte Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon,$$

falls $\ell(Z) < \delta$.

Der Beweis wird auf die Analysisvorlesungen verschoben.

Für das Riemann-Integral gelten einige wichtige Eigenschaften:

Satz:

Sei $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(a) Ist $a < c < b$, so gilt

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \iff f \in \mathcal{R}([a,c]) \text{ und } f \in \mathcal{R}([c,b])$$

und

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(b) Ist $g \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

(c) Ist $g \in \mathcal{R}(I)$ und $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in I$, so gilt

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

(d) $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(e) Jede stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis:

Wir betrachten beispielhaft nur (e): da $f$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so daß für $|x - x'| \leq \delta$, $x, x' \in I = [a,b]$ folgt

$$|f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Für eine Zerlegung $Z$ mit Feinheit $\delta$, d.h.

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \delta,$$

gilt $M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ und daher

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\square$

Beispiel:

Es gibt beschränkte Funktionen, die nicht integrierbar sind. Betrachte etwa

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann ist $f$ nicht integrierbar, denn im jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ gibt es rationale und irrationale Punkte. Daher ist

$$m_k = 0 \quad \text{und} \quad M_k = 1$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \underline{S}_Z(f) \neq \overline{S}_Z(f) = 1$$

Man nennt $f$ die Dirichletfunktion.

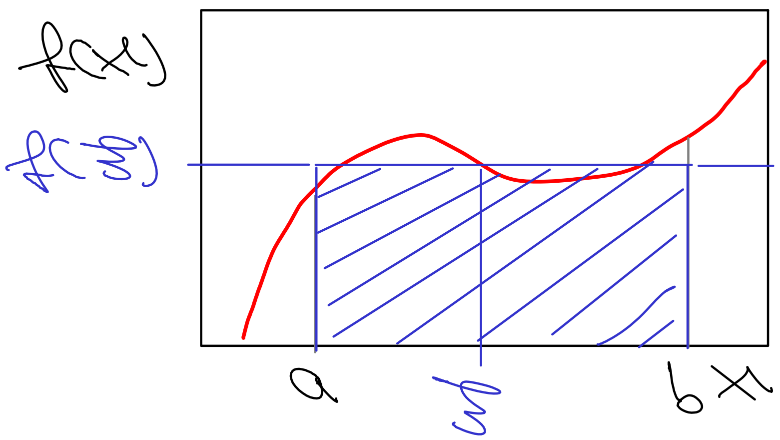
## 4.2. Mittelwertsätze der Integralrechnung

Die folgenden Mittelwertsätze werden u.a. zum Beweis des Hauptsatzes im nächsten Abschnitt benötigt.

**Satz:** (1. Mittelwertsatz der I.-Rechnung)

Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$$




**Beweis:** Für jede Zerlegung $Z$ von $[a,b]$ ist

$$m(b-a) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \overline{S}_Z(f) \leq M(b-a),$$

wo

$$m = \inf\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$$
$$M = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$$

Da $f$ alle Werte zwischen $m$ und $M$ annimmt und

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M,$$

existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$\square$

Satz: (2. Mittelwertsatz der I.-Rechnung)

Es seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $g(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Der Beweis folgt analog zu dem des vorherigen Satzes.

## 4.3. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz stellt eine Verbindung zwischen Integral- und Differentialrechnung her und ermöglicht so die tatsächliche Berechnung von Riemann-Integralen.

**Definition:**

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f$, wenn $F$ differenzierbar ist und

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

Man schreibt: $F\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

**Satz:**

Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von $f$. Sind $F$ und $G$ Stammfunktionen, so ist $G - F$ konstant.

**Beweis:**

Der erste Teil ist trivial und der zweite folgt aus $(G-F)' = f - f = 0$. $\square$

**Satz:** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

(a) Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ist eine Stammfunktion von $f$.

(b) Wenn $G$ eine Stammfunktion von $f$ ist, dann gilt:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G\Big|_a^b = G(b) - G(a)$$

**Beweis:**

(a) Betrachte

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Nach dem 1. Mittelwertsatz existiert ein $\xi_h$ zwischen $x$ und $x+h$ mit

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)$$

Damit folgt aus der Stetigkeit von $f$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h)$$
$$= f(x)$$

(b) $G-F$ ist konstant, daher

$$G(b)-G(a) = F(b)-F(a)$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt$$

$\square$

Der Hauptsatz zeigt also, daß Integration die Umkehrung der Differentiation,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

und umgekehrt

$$\int_a^x \frac{df}{dt}(t)\,dt = f(x),$$

sofern $f(a)=0$.

Man nennt daher

$$\int f(x)\,dx = \{F+c \mid c\in\mathbb{R}\}$$

auch das unbestimmte Integral von $f$, d.h. die Menge der Stammfunktionen.

## 4.4. Integrationsregeln und -Methoden

Alleine mit der Definition des Riemann integrals läßt sich kaum ein Integral direkt ausrechnen. Stattdessen verwendet man zunächst den Hauptsatz um die bekannten Ausdrücke für die Ableitungen der elementaren Funktionen „rückwärts" zu lesen.

Daraus ergibt sich folgende

### Tabelle der Grundintegrale:

| $f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ | $f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|---|---|
| $x^\alpha$, $\alpha \neq -1$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ | $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\cot x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ | $\frac{1}{\cosh^2 x}$ | $\tanh x$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sinh^2 x}$ | $\coth x$ |

| $f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$<br>$\lvert x\rvert < 1$ |
| $\frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arcosh} \lvert x\rvert = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$<br>$\lvert x\rvert > 1$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\operatorname{arsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x = \operatorname{arccot} x + \frac{\pi}{2}$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$<br>$\lvert x\rvert < 1$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{arcoth} x = \pm\frac{1}{2}\ln\left(\pm\frac{1+x}{1-x}\right)$ |

Weitere Integrale lassen sich dann vor allem mit Hilfe der partiellen Integration und der Substitutionsregel berechnen.

Satz 2: (partielle Integration)

Sind $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und

Sind $F, G$ Stammfunktionen von $f$, $g$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx = F\cdot G\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\,g(x)\,dx$$

Beweis:

Aus der Produktregel der Differentiation folgt

$$(F\cdot G)' = F'G + FG' = fG + Fg,$$

so daß man mit dem Hauptsatz erhält:

$$\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx + \int_a^b F(x)\,g(x)\,dx = F\cdot G\Big|_a^b.$$

Satz: (Substitutionsregel)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g: [a',b'] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g([a',b']) \subset [a,b]$.
Dann gilt:

$$\int_{g(a')}^{g(b')} f(x)\,dx = \int_{a'}^{b'} f(g(y))\cdot g'(y)\,dy$$

Beweis:

Aus dem Hauptsatz folgt, daß eine Stammfunktion $F$ von $f$ existiert.

Nach der Kettenregel der Differentialrechnung ist

$$(F\circ g)'(y) = f(g(y))\cdot g'(y)$$

Mit dem Hauptsatz folgt:

$$\int_{a'}^{b'} f(g(y))\cdot g'(y)\,dy = F\circ g\Big|_{a'}^{b'}$$
$$= F(g(b')) - F(g(a'))$$

$$\int_{g(a')}^{g(b')} f(x)\,dx = F\Big|_{g(a')}^{g(b')} = F(g(b')) - F(g(a'))$$

$\square$

Als häufig auftauchenden Spezialfall hat man

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

daher hat man folgenden

<u>Satz</u>: (logarithmische Integration)

Ist $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g(x) > 0$ für $0 \le a \le b$, so ist

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log\Big|_a^b$$

Der Beweis folgt direkt aus der Subst.-Regel.

## Beispiele:

(a) Berechne $\int \ln x \, dx$ durch part. Integration. Setze: $f(x) = 1$, $G(x) = \ln x$. Daher:

$$\int \underbrace{\ln x}_{f \cdot G} \, dx = \underbrace{x \cdot \ln x}_{F \cdot G} - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{F \cdot g} \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - x$$

(b) Berechne $\int 9x^2 \ln x$ mit partieller Integration. Setze dazu

$$f(x) = 9x^2, \quad G(x) = \ln x$$

dann folgt

$$\int \underbrace{9x^2 \ln x}_{f \cdot G} = \underbrace{3x^3 \cdot \ln x}_{F \cdot G} - \int \underbrace{3x^3 \cdot \frac{1}{x}}_{F \cdot g} \, dx$$

$$= 3x^3 \ln x - x^3$$

(c) Berechne $\int (2-3x)^4 \, dx$ mit Hilfe der Substitutionsregel. Setze dazu

$$g(y) = -\frac{y-2}{3}$$

$$g'(y) = -\frac{1}{3}$$

Daher ist:

$$\int (2-3x)^4\,dx = \int y^4 \left(-\frac{1}{3}\right) dy$$
$$= -\frac{1}{15} y^5 = -\frac{1}{15}(2-3x)^5$$

In der Praxis verwendet man die Substitutionsregel häufig in einer etwas anderen Form.

Man schreibt:

$$t = (2-3x)$$

$$dt = -3\,dx \;,\; dx = -\frac{1}{3}\,dt$$

$$\Rightarrow \int (2-3x)^4\,dx = \int -\frac{t^4}{3}\,dt$$
$$= -\frac{1}{15} t^5 = -\frac{1}{15}(2-3x)^5$$

(d) Berechne $\int 3x^2 e^{x^3}\,dx$ mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$t = x^3 \;,\; dt = 3x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \int 3x^2 e^{x^3}\,dx = \int e^t\,dt$$
$$= e^t = e^{x^3}$$

(e) Für das Integral

$$\int \frac{6x^2 + 2\cos x}{x^3 + 2\sin x}\,dx$$

verwenden wir den Spezialfall „logarithmische Integration" der Substitutionsregel. Mit

$$f(x) = x^3 + \sin x,$$

$$f'(x) = 3x^2 + \cos x,$$

ist

$$\int \frac{6x^2 + 2\cos x}{x^3 + \sin x}\, dx = \int \frac{2 f'(x)}{f(x)}\, dx$$

$$= 2 \ln f(x) = 2 \ln (x^3 + \sin x)$$

## Tricks und Rechenregeln für Integrale:

Integralrechnung wird häufig als relativ schwierig empfunden, da die einzigen Rechenregeln, partielle Integration und Substitutionsregel, in jedem Fall unendlich viele mögliche Aufspaltungen eines Produkts bzw. unendlich viele Substitutionen erlauben. Dies steht im Gegensatz zur Differentialrechnung, wo sich jede beliebige Kombination der elementaren Funktionen durch einfache Anwendung der Produkt-, Quotienten- und Kettenregel nach einem einfachen

Algorithmus berechnen lassen.

Daher ist Integration in hohem Grade Erfahrungssache, damit die richtige Aufspaltung bzw. Substitution gemacht wird.

Wir wollen daher im folgenden noch eine Reihe von Tricks für häufig vorkommende Situationen betrachten.

## 1. Integration rationaler Funktionen

Integrale der Form

$$\int \frac{Z(x)}{N(x)}\,dx$$

mit Polynomen $Z(x)$ und $N(x)$ können immer, wenn auch manchmal mit erheblichem Aufwand berechnet werden.

Wir betrachten zunächst zwei einfache Fälle:

(a) Mit der Substitution $u = cx+d$ ist

$$\int \frac{dx}{cx+d} = \frac{1}{c}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{c}\ln|u|$$

$$= \frac{1}{c}\ln|cx+d|$$

und ebenso

$$\int \frac{dx}{(cx+d)^n} = \frac{1}{c}\int \frac{du}{u^n}$$
$$= \frac{-1}{c(n-1)}\,\frac{1}{(cx+d)^{n-1}}$$

(b) Für das Integral

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

formt man den Nenner durch quadratische Ergänzung um:

$$ax^2+bx+c = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right\}$$
$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\alpha\right\}$$

mit $\alpha = \dfrac{\Delta}{4a^2} = \dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$.

Mit der Substitution $u = x+\frac{b}{2a}$ folgt zunächst

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2+\alpha},$$

und das Ergebnis hängt vom Vorzeichen von $\Delta = 4ac-b^2$ ab:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}, & \Delta>0 \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{artanh}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, & \Delta<0 \end{cases}$$

Für Zähler vom Grad 1 hat man:

(a)
$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$\int \frac{\frac{p}{2a}(2ax+b)+(q-\frac{pb}{2a})}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$\frac{p}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{a^2+bx^2+c}\,dx}_{\frac{f'(x)}{f(x)}} + \frac{2aq-pb}{2a}\underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{\text{s.o.}}$$

(b) Ebenso zerlegt man f. $n>1$:

$$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$
$$+ \frac{2aq-pb}{2a}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Für das erste Integral ist:

$$u = ax^2+bx+c \Rightarrow du = (2ax+b)\,dx$$

Daher:

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \int \frac{du}{u^n}$$
$$= \frac{1}{1-n}\,u^{-n+1}$$

Für das zweite Integral macht man den Ansatz

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{ux+v}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \int \frac{w}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\,dx$$

mit zu bestimmenden Konstanten $u, v, w$. Differentiation der Gleichung und Multiplikation mit $(ax^2+bx+c)^n$ ergibt

$$1 = (ax^2+bx+c)\cdot u - (ux+v)(n-1)(2ax+b) + w(ax^2+bx+c)$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$u = \frac{2a}{(n-1)(4ac-b^2)}, \quad v = \frac{b}{(n-1)(4ac-b^2)},$$

$$w = \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac-b^2)}$$

Damit folgt das ursprüngliche Integral aus den oben behandelten.

Den allgemeinen Fall rationaler Funktionen behandelt man dann mit einer Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{Z(x)}{N(x)}\,dx$$

1. Ist Grad $Z(x) \geq$ Grad $N(x)$, so führe man eine Polynomdivision durch. Es ergibt sich dann ein Polynom und eine rationale Funktion $Z/N$, für die Grad $Z <$ Grad $N$ ist.

---

Exkurs: (Polynomdivision)

Für eine rationale Funktion

$$\frac{Z(x)}{N(x)}$$

läßt sich für Grad $Z(x) \geq$ Grad $N(x)$ folgende äquivalente Umformung durchführen:

(1) Man ordne $Z(x)$, $N(x)$ nach fallenden Potenzen von $x$

(2) Man teile den 1. Summanden von $Z(x)$ durch den 1. Summanden von $N(x)$. Das ergibt den ersten Summanden des Gesamtergebnisses.

(3) Man multipliziere $N(x)$ mit dem zuletzt erhaltenen Summanden des Gesamtergebnisses

(4) Man subtrahiere dieses vom jeweils vorhergehenden Polynom

(5) Ist für das Resultat der Zählergrad mindestens der Nennergrad, so fahre man mit (2) fort. Andernfalls ergänze man das Ergebnis um den Restbruch und ist fertig.

Beispiele:

(a) $(x^3 - 2x^2 - 9x + 18) : (x-2) = x^2 - 9$

$$
\begin{array}{l}
-(x^3 - 2x^2) \\
\hline
0 + 0 - 9x + 18 \\
-9x + 18 \\
\hline
0
\end{array}
$$

(b) $(x^3 + 6x^2 + 12x + 1) : (x^2 - 3x + 1) = x + 9 + \dfrac{38x - 8}{x^2 - 3x + 1}$

$$
\begin{array}{l}
-(x^3 - 3x^2 + x) \\
\hline
0 + 9x^2 + 11x + 1 \\
-(9x^2 - 27x + 9) \\
\hline
0 + 38x - 8
\end{array}
$$

---

2. Man bestimme die Nullstellen des Nennerpolynoms. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ergibt sich eine Faktorzerlegung.

$$N(x) = (x-a)^k (x-b)^l \cdots (x^2+px+q)^m (x^2+rx+s)^n \cdots,$$

wo $a, b, \dots$ reelle Nullstellen von $N(x)$

mit Vielfachheiten $k, l$ und $(x^2+px+q)$, $(x^2+rx+s)$, ... Paaren von konjugiert komplexen Nullstellen der Vielfachheiten $m, n, \ldots$ entsprechen.

3. Unter der Voraussetzung, daß

$$\text{Grad } Z < \text{Grad } N$$

macht man den Ansatz

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(x-b)^l}$$

$$+ \ldots$$

$$+ \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2}$$

$$+ \ldots + \frac{P_mx+Q_m}{(x^2+px+q)^m}$$

$$+ \frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)} + \ldots + \frac{R_nx+S_n}{(x^2+rx+s)^n}$$

$$+ \ldots$$

Die Koeffizienten bestimmt man, indem man die rechte Seite auf den Hauptnenner $N(x)$ bringt und Koeffizientenvergleiche im Zähler durchführt.
(Das entsprechende Gleichungssystem ist immer eindeutig lösbar)

4. Berechne die Integrale der Summanden auf der rechten Seite mit den oben besprochenen Methoden.

**Beispiel:**

Betrachte das Integral

$$\int \frac{x\,dx}{(x+2)^2(x-1)}$$

Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1}$$

Hauptnenner:

$$x = A(x+2)(x-1) + B(x-1) + C(x+2)^2$$

Koeffizientenvergleich:

$$x^2: \quad 0 = A + C$$
$$x^1: \quad 1 = A + B + 4C$$
$$x^0: \quad 0 = -2A + B + 4C$$

$$\Longrightarrow \quad A = -\frac{1}{9}, \quad B = \frac{2}{3}, \quad C = \frac{1}{9}$$

also:

$$\int \frac{x\,dx}{(x+2)^2(x-1)} = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$+\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-1}$$

$$=-\frac{1}{9}\ln|x+2|-\frac{2}{3}\frac{1}{x+2}+\frac{1}{9}\ln|x-1|$$

## 2. Integration nicht-rationaler Funktionen

(a) Integrale der Form

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}}\right)dx,$$

wo $R(x)$ eine rationale Funktion, behandelt man mit der Substitution

$$t=\sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}},\quad x=\frac{st^m-q}{p-rt^m}$$

$$\Longrightarrow dx=mt^{m-1}\frac{sp-rq}{(p-rt^m)^2}dt$$

Daher lassen sich die Methoden aus dem vorhergehenden Abschnitt verwenden.

(b) Eine rationale Funktion in $\sinh x$, $\cosh x$ ist auch eine rationale Funktion in $e^x$. Daher lassen sie sich mit der Substitution $u=e^x$ behandeln.

(c) Integrale der Form

$$\int R(\cos x,\sin x)dx$$

werden durch die Substitution

$$u = \tan\frac{x}{2}$$

in Integrale über rationale Funktionen überführt. Es ist nämlich:

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2u}{1+u^2}$$

und:

$$dx = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\,du = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Wie man sieht, ist Integration eine Kunst mit vielen Tricks um kniffelige Fälle zu behandeln.

## 4.5. Uneigentliche Integrale

Berechnet man Integrale mit Grenzen a oder b $\to \pm\infty$ oder mit Grenzen an den inneren Rändern des Definitionsbereiches des Integranden, so kommen Grenzwertbetrachtungen und Integralrechnung zusammen.

Definition:

(a) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert man die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^c f(x)\,dx := \lim_{b\to-\infty} \int_b^c f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx.$$

Dabei hängt der Wert des letzten Integrals nicht von der Wahl des Punktes c ab.

(b) Sei $a < c < b$ und sei $f: [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert man die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^{c-} f(x)\,dx := \lim_{t\to c-0} \int_a^t f(x)\,dx$$

$$\int_{c+}^{b} f(x)\,dx := \lim_{t\to c+0} \int_t^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^{b} f(x)\,dx := \int_a^{c-} f(x)\,dx + \int_{c+}^{b} f(x)\,dx$$

Beispiele:

(a) $$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} (1-e^{-b}) = 1$$

(b) $$\int_0^{\infty} \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x\,dx$$

$= \lim_{b\to\infty} \sin b$ existiert nicht!

(c) $$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a}$$

(siehe Übungen)

Es lassen sich Kriterien für die Konvergenz von uneigentlichen Integralen angeben:

Satz: (Cauchy-Kriterium)

(a) Für eine stetige Funktion existiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $b_0 > a$ gibt, so daß

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \quad \forall\, b_2 > b_1 \geq b_0 .$$

Entsprechendes gilt für das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx .$$

(b) Für eine stetige Funktion $f: ]a,b[ \to \mathbb{R}$ existiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$$

genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c_0$, $a < c_0 < b$ gibt, so daß

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \right| < \varepsilon \quad \forall\, c_0 \leq c_1 < c_2 < b.$$

Entsprechendes gilt für das uneigentliche Integral

$$\int_{c+}^{b} f(x)\,dx.$$

Die Beweise verschieben wir wieder auf die Analysis vorlesungen.

Es ist nützlich, auch hier den Begriff der absoluten Konvergenz einzuführen.

Definition:

Man nennt eines der uneigentlichen Integrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \int_a^{b-0} f(x)dx$$

$$\text{bzw. } \int_{a+0}^{b} f(x)dx$$

absolut konvergent und $f$ absolut integrierbar, wenn das jeweilige Integral

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx, \int_{-\infty}^{a} |f(x)|dx, \int_a^{b-0} |f(x)|dx$$

$$\text{bzw. } \int_{a+0}^{b} |f(x)|dx$$

konvergiert.

Dann gilt folgender

**Satz:** Ein absolut konvergentes uneigentliches Integral ist konvergent.

**Beweis:**

Wir betrachten exemplarisch den Fall des Integrals

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Nach Voraussetzung ist dieses absolut konvergent, d.h. nach dem Cauchykriterium ex. ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon \quad \forall\ b_2 > b_1 \geq b_0$$

Nun ist aber

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$$

und daher

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

$\square$

Umgekehrt zeigt das Beispiel

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$$

ein konvergentes, aber nicht absolut konvergentes Integral (siehe Übungen).

Um weitere Konvergenzkriterien abzuleiten kehren wir kurzzeitig zur Frage der Konvergenz von Reihen zurück.

**Exkurs:** Konvergenzkriterien für Reihen

Zur Entscheidung über die Konvergenz einer unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty a_n$$

vergleicht man gliedweise mit einer Reihe, deren Konvergenzverhalten bekannt ist. Es gilt folgender

**Satz:** („Majorantenkriterium")

Sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine gegebene Reihe

(a) Gibt es eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^\infty c_n$ mit $c_n \geq 0$ $\forall n$, so daß

$$|a_n| \leq c_n$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$

absolut konvergent, und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ heißt eine konvergente Majorante.

(b) Gibt es eine divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ mit $d_n \geq 0$ $\forall n$, so daß

$$|a_n| \geq d_n$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent, und $\sum d_n$ heißt eine divergente Minorante.

Mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

lassen sich hieraus folgende Kriterien ableiten.

Satz: (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

(a) Gibt es eine Konstante $0<q<1$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(b) Gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

**Satz:** (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Gibt es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, so daß

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \quad \underset{\text{fast}}{\forall}\, n \in \mathbb{N},$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(b) Gilt dagegen

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \quad \underset{\text{fast}}{\forall}\, n \in \mathbb{N},$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent.

Mit Hilfe von uneigentlichen Integralen können wir nun ein weiteres Konvergenzkriterium angeben.

**Satz:** (Integralkriterium)

Sei $f : [1, \infty[ \to [0, \infty[$ eine monoton fallende, stetige und nichtnegative Funktion. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergent } \Longleftrightarrow$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergent}$$

**Beispiel:**

Betrachte die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n = \frac{1}{n^s}$$

Die Funktion $f(x) = x^{-s}$ ist für $s > 0$ monoton fallend. Es ist

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^s}\,dx$$

$$\overset{s \neq 1}{=} \lim_{b \to \infty} \frac{1}{-s+1} x^{-s+1} \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left( \frac{b^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \right)$$

$$\overset{s > 1}{=} -\frac{1}{1-s}$$

So daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s > 1$

konvergiert.

Ein Majorantenkriterium läßt sich analog auch für uneigentliche Integrale angeben.

**Satz:** (Majorantenkriterium)

Sei $a \leq b \leq +\infty$ und $f, g, h : [a, b[ \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$0 \leq h(x) \leq |f(x)| \leq g(x) \text{ f. } a \leq x < b.$$

Dann gilt:

$$\int_a^{b\to} |f(x)|dx \begin{cases} \text{konvergent falls } \int_a^{b\to} g(x)dx \text{ konv.} \\ \text{divergent falls } \int_a^{b\to} h(x)dx \text{ div.} \end{cases}$$

Es läßt sich wiederum ein Kriterium für den Quotienten von Funktionen angeben.

**Satz:** (Vergleichskriterium)

Seien $f(x), g(x)$ auf $[c, \infty[$ stetig und positiv, $a > c$.

(a) Wenn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty$$

ist, so haben die Integrale $\int_a^\infty f(x)dx$ und $\int_a^\infty g(x)dx$ dasselbe Konvergenzverhalten.

(b) Wenn

$$\lim_{x\to c+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty$$

ist, so haben die Integrale $\int_{c+}^a f(x)dx$ und $\int_{c+}^a g(x)dx$ dasselbe Konvergenzverhalten.

Der Beweis folgt direkt aus dem Majorantenkriterium.

Mit ähnlichen Methoden lassen sich weitere Konvergenzkriterien ableiten, was wir aber auf die Analysis vorlesungen verschieben.

## 4.6. Parameterabhängige Integrale und die Gammafunktion

Häufig betrachtet man uneigentliche

Integrale, die noch von zusätzlichen Parametern abhängen, etwa

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt ,$$

und man fragt sich, von welcher Art die Abhängigkeit von den Parametern ist.

Für solche Situationen definieren wir

**Definition:**

Sei

$$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < +\infty , c \leq y \leq d \}$$

und sei $f: S \to \mathbb{R}$ stetig, $b_n \to \infty$ eine beliebige Zahlenfolge. Existiert der Limes

$$\varphi(y) := \lim_{n \to \infty} \int_b^{b_n} f(x,y) \, dx$$

für jedes $y \in [c,d]$, so heißt

$$\int_b^{+\infty} f(x,y) \, dx =: \varphi(y)$$

konvergent bzgl. $y$.

Es gilt hierfür nun folgendes

## Satz:

Sei $f: S \to \mathbb{R}$ stetig und $g: [a,\infty[ \to \mathbb{R}$ stetig und positiv. Ist dann

$$\int_a^\infty g(x)\,dx$$

konvergent und gilt

$$|f(x,y)| \le g(x) \quad \forall y \in [c,d],$$

so ist

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

absolut konvergent.

## Beispiel:

Betrachte

$$F(y) := \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx$$

Es gilt:

$$|e^{-xy} \sin x| \le e^{-x} \quad \text{für } y \ge 1$$

und $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ ist konvergent.

Daher ist $F(y)$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Es ist:

$$\varphi(y) = \lim_{b \to \infty} {}_0\int^b e^{-xy} \sin x \, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left\{ \frac{e^{-xy}}{1+y^2} (-y \sin x - \cos x) \right\}_{x=0}^{x=b}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left\{ \frac{e^{-by}}{1+y^2} (-y \sin b - \cos b) + \frac{1}{1+y^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{1+y^2} \quad |$$

wobei man das Integral durch zweimalige partielle Integration löst.

Für solche Parameterintegrale gilt nun folgendes

<u>Satz</u>: Sei $f(x,y)$ stetig f. $x \geq a$, $c \leq y \leq d$. Wenn das Integral

$$\varphi(y) = {}_a\int^\infty f(x,y) \, dx$$

gleichmäßig auf $c \leq y \leq d$ konvergiert, dann ist $\varphi(y)$ stetig auf $[c,d]$ und es gilt f. $y_0 \in [c,d]$:

$$\varphi(y_0) = \lim_{y \to y_0} {}_a\int^\infty f(x,y) \, dx$$

$$\stackrel{!}{=} \int_a^\infty \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int_a^\infty f(x,y_0)\,dx$$

Wir betrachten nun insbesondere das oben angeführte uneigentliche Integral,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

Für dieses doppelt-uneigentliche, parameterabhängige Integral gilt:

Satz: (Gamma-funktion)

(a) Für alle $x>0$ existiert die Eulersche Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

und stellt eine $C^\infty$-Funktion dar.

(b) Die $\Gamma$-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

(c) Ferner gilt:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n! \text{ f. } n\in\mathbb{N},$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},\ n\in\mathbb{N}$$

**Beweis:**

$\Gamma(x)$ existiert genau dann, wenn

$$\int_0^1 e^{-t}\,t^{x-1}\,dt \ \underline{\text{und}}\ \int_1^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$$

existieren.

(a) Es existiert $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_1^\infty = 1.$

Ferner ist

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}\,t^{x-1}}{t^2} = 0$$

nach den Regeln von de l'Hospital. Daher ist

$$\int_1^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$$

nach dem Vergleichskriterium absolut u. gleichmäßig konvergent.

(b) Es sei

$$\alpha(x) := \int_0^1 e^{-t}\,t^{x-1}$$

Mit der Substitution $u = \frac{1}{t}$ folgt:

$$\alpha(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} e^{-t} t^{x-1} \, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1}^{1/\varepsilon} e^{-\frac{1}{u}} u^{-x-1} \, du$$

ist absolut und gleichmäßig konvergent, weil das Integral

$$\int_{1}^{\infty} u^{-x-1} \, du$$

für $x > 0$ konvergiert.

$\square$