

4. Integralrechnung

Die Integralrechnung hat zwei hauptsächliche Anwendungsgebiete:

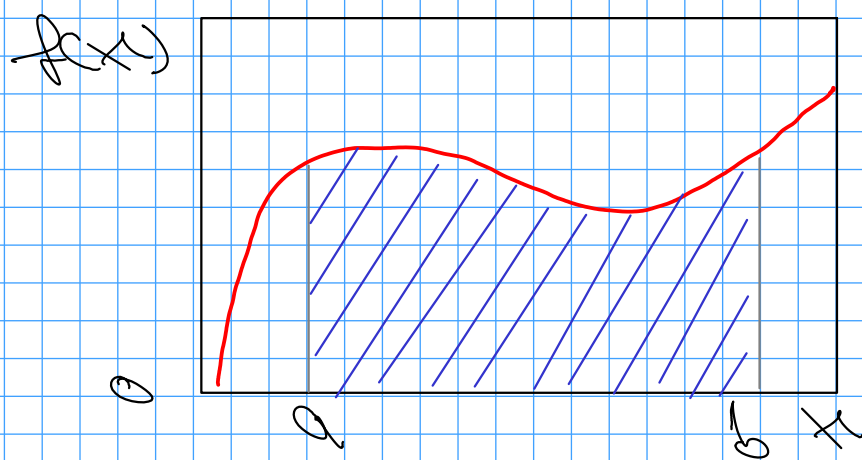
(1) Flächenmessung

(2) Umkehrung der Differentiation

Wir befassen uns zunächst mit dem ersten Problem und werden danach sehen, inwiefern das so eingeführte Integral als Umkehrung der Ableitung dienen kann.

4.1. Das Riemannintegral

Wir wollen den Flächeninhalt unter einer gegebenen Kurve bestimmen:



Wir suchen also den Inhalt von $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Die Riemannsche Idee ist die Approximation des Flächeninhalts durch eine Summe von Rechtecken, d.h. eine Konstruktion der folgenden Form:



Betrachten wir zunächst ein Beispiel:

Zur Bestimmung der Fläche unter der Parabel $f(x) = x^2$ zwischen $a=0$ und b zerlegen wir $[0, b]$ in n Streifen der Breite h . Die Fläche des k -ten Rechtecks ($k=0, \dots, n-1$) ist

$$A_k = h (kh)^2 = h^3 k^2$$

Daher ist die Gesamtfläche

$$A^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k = h^3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = h^3 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

wie man durch vollständige Induktion leicht beweist.

Mit $h = \frac{b}{n}$ folgt:

$$\begin{aligned} \Delta^{(n)} &= \left(\frac{b^3}{n^3}\right) \frac{n}{6} (n-1)(2n-1) \\ &= \frac{b^3}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Im Limes einer feiner werdenden Unterteilung ergibt sich:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(n)} = \frac{b^3}{3}$$

Wir wollen diesen Ansatz nun formalisieren. Dazu approximieren wir die gesuchte Fläche "von unten" und "von oben". Wenn beide Varianten gegen den gleichen Grenzwert streben, haben wir den gesuchten Flächeninhalt bestimmt.

Definition:

Für ein Intervall $I = [a, b]$ heißt

$$Z = (x_0, \dots, x_r)$$

mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = b$ eine **Zerlegung** von $[a, b]$. Für eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$m_k = \inf \{ f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \},$$

$$M_k = \sup \{ f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \}.$$

Definiert man nun

$$\underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

Untersumme von f

$$\overline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

Obersumme von f

so nennt man

$$U(f) \equiv \sup \{ \underline{S}_Z(f) \mid Z \in \mathcal{Z}[a,b] \}$$

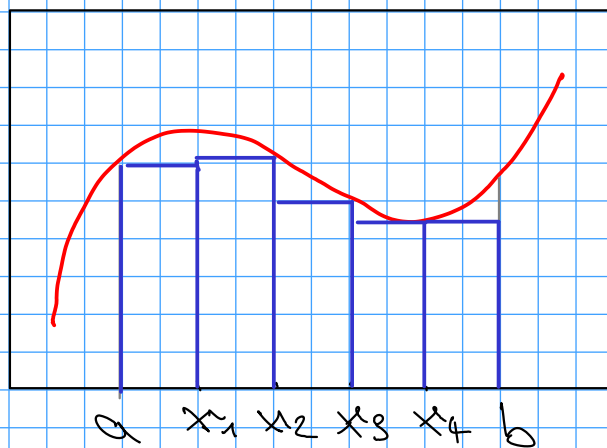
das Unterintegral von f

und

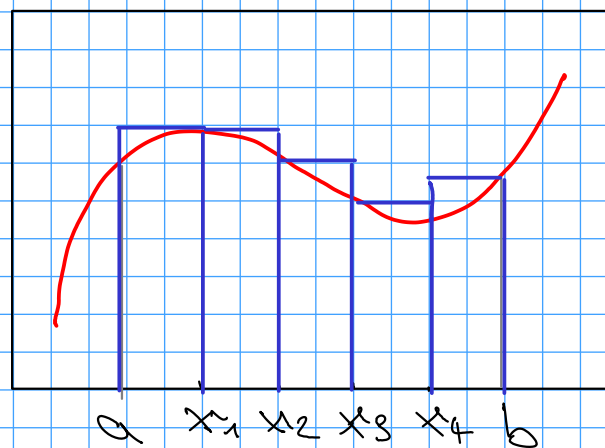
$$O(f) \equiv \inf \{ \overline{S}_Z(f) \mid Z \in \mathcal{Z}[a,b] \}$$

das Oberintegral von f ,

wobei $\mathcal{Z}[a,b]$ die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$ bezeichnet.



Untersumme



Obersumme

Damit können wir definieren:

Definition: Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, wenn das Unterintegral gleich dem Oberintegral ist. Man schreibt dann

$$\int_a^b f(x) dx \equiv U(f) = O(f)$$

Man setzt: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Die Menge der Riemannintegrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}([a, b])$.

Definiert man die **Feinheit** der Zerlegung Z als

$$l(Z) = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1}),$$

so gilt:

Satz: (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium)

Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon,$$

falls $l(Z) < \delta$.

Der Beweis wird auf die Analysisvorlesungen verschoben.

Für das Riemann-Integral gelten einige wichtige Eigenschaften:

Satz 2:

Sei $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar.

(a) Ist $a < c < b$, so gilt

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff f \in \mathcal{R}([a, c]) \text{ und } f \in \mathcal{R}([c, b])$$

und

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(b) Ist $g \in \mathcal{R}(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

(c) Ist $g \in \mathcal{R}(I)$ und $f(x) \leq g(x) \forall x \in I$, so gilt

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

(d)
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(c) Jede stetige Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis:

Wir betrachten beispielhaft nur (c): da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so daß für $|x - x'| \leq \delta$, $x, x' \in I = [a, b]$ folgt

$$|f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Für eine Zerlegung Z mit Feinheit δ , d.h.

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \delta,$$

gilt $M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ und daher

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

□

Beispiel:

Es gibt beschränkte Funktionen, die nicht integrierbar sind. Betrachte etwa

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist f nicht integrierbar, denn in

jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ gibt es rational und irrationale Punkte. Daher ist

$$m_k = 0 \quad \text{und} \quad M_k = 1$$

$$\Rightarrow 0 = \underline{S}_Z(f) + \overline{S}_Z(f) = 1$$

Man nennt f die Dirichlet-Funktion.

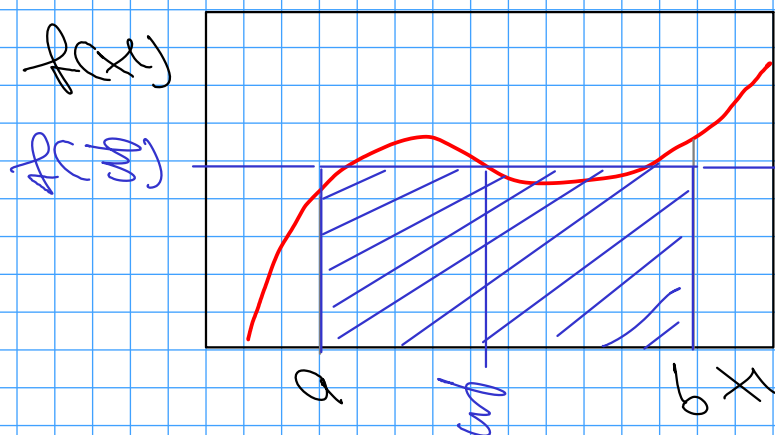
4.2. Mittelwertsätze der Integralrechnung

Die folgenden Mittelwertsätze werden u.a. zum Beweis des Hauptsatzes im nächsten Abschnitt benötigt.

Satz: (1. **Mittelwertsatz** der I.-Rechnung)

Ist $f \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi)$$



Beweis: Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ ist

$$m(b-a) \leq \underline{S}_2(f) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{S}_2(f) \leq M(b-a),$$

wo

$$m \equiv \inf \{ f(x) \mid a \leq x \leq b \}$$

$$M \equiv \sup \{ f(x) \mid a \leq x \leq b \}$$

Da f alle Werte zwischen m und M annimmt und

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M,$$

existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

□

Satz 2: (2. Mittelwertsatz der I.-Rechnung)

Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $g(x) > 0 \forall x \in [a, b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

Der Beweis folgt analog zu dem des vorherigen Satzes.

4.3. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz stellt eine Verbindung zwischen Integral- und Differentialrechnung her und ermöglicht so die tatsächliche Berechnung von Riemann-Integralen.

Definition:

Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.
 $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f , wenn F differenzierbar ist und

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

Man schreibt: $F|_a^b = F(b) - F(a)$.

Satz:

Ist F eine Stammfunktion von f und $c \in \mathbb{R}$, so ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f . Sind F und G Stammfunktionen, so ist $G - F$ konstant.

Beweis:

Der erste Teil ist trivial und der zweite folgt aus $(G - F)' = f - f = 0$.

□

Satz 2: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

(a) Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

ist eine Stammfunktion von f .

(b) Wenn G eine Stammfunktion von f ist, dann gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = G|_a^b = G(b) - G(a)$$

Beweis:

(a) Betrachte

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

Nach dem 1. Mittelwertsatz existiert ein ξ_h zwischen x und $x+h$ mit

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h)$$

Damit folgt aus der Stetigkeit von f :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

(b) $G - F$ ist konstant, daher

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

□

Der Hauptsatz zeigt also, daß Integration die Umkehrung der Differentiation,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

und umgekehrt

$$\int_a^x \frac{df}{dt}(t) dt = f(x),$$

sofern $f(a) = 0$.

Man nennt daher

$$\int f(x) dx = \{ F + c \mid c \in \mathbb{R} \}$$

auch das **unbestimmte Integral** von f ,
d.h. die Menge der Stammfunktionen.

4.4. Integrationsregeln und -Methoden

Aberine mit der Definition des Riemann Integrals lässt sich kaum ein Integral direkt ausrechnen. Stattdessen verwendet man zunächst den Hauptsatz um die bekannten Ausdrücke für die Ableitungen der elementaren Funktionen "rückwärts" zu lesen.

Daraus ergibt sich folgende

Tabelle der Grundintegrale:

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
x^α $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\coth x$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$ $ x < 1$
$\frac{1}{\pm \sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccoth} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$ $ x > 1$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x = \operatorname{arccot} x + \frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ $ x < 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x = \pm \frac{1}{2} \ln \left(\pm \frac{1+x}{1-x} \right)$

Weitere Integrale lassen sich dann vor allem mit Hilfe der partiellen Integration und der Substitutionsregel berechnen.

Satz 2: (partielle Integration)

Sei $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

sind F, G Stammfunktionen von f und g , so gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F \cdot G \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Beweis:

Aus der Produktregel der Differentiation folgt

$$(F \cdot G)' = F'G + F \cdot G' = fG + Fg,$$

so daß man mit dem Hauptsatz erhält:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b F(x)g'(x)dx = F \cdot G \Big|_a^b.$$

Satz: (Substitutionsregel)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g([a', b']) \subset [a, b]$.

Dann gilt:

$$\int_{g(a')}^{g(b')} f(x)dx = \int_{a'}^{b'} f(g(y)) \cdot g'(y)dy$$

Beweis:

Aus dem Hauptsatz folgt, daß eine Stammfunktion F von f existiert.

Nach der Kettenregel der Differentialrechnung ist

$$(F \circ g)'(y) = f(g(y)) \cdot g'(y)$$

Mit dem Hauptsatz folgt:

$$\int_a^{b'} f(g(y)) \cdot g'(y) dy = F \circ g \Big|_a^{b'}$$

$$= F(g(b')) - F(g(a'))$$

$$\int_{g(a')}^{g(b')} f(x) dx = F \Big|_{g(a')}^{g(b')} = F(g(b')) - F(g(a'))$$

□

Es häufig auftretenden Spezialfall hat man

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

daher hat man folgenden

Satz 2: (logarithmische Integration)

Ist $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g(x) > 0$ für $a \leq x \leq b$, so ist

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln g \Big|_a^b$$

Der Beweis folgt direkt aus der Subst.-Regel.

Beispiele:

a) Berechne $\int \ln x dx$ durch part. Integration. Setze: $f(x) = 1$, $G(x) = \ln x$.
Daher:

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \underset{f \cdot G}{x \cdot \ln x} - \int \underset{f \cdot g}{x \cdot \frac{1}{x}} dx \\ &= x \cdot \ln x - x \end{aligned}$$

b) Berechne $\int 3x^2 \ln x$ mit partieller Integration. Setze dazu

$$f(x) = 3x^2, \quad G(x) = \ln x$$

dann folgt

$$\begin{aligned} \int 3x^2 \ln x &= \underset{f \cdot G}{3x^3 \cdot \ln x} - \int \underset{f \cdot g}{3x^3 \cdot \frac{1}{x}} dx \\ &= 3x^3 \ln x - x^3 \end{aligned}$$

c) Berechne $\int (2-3x)^4 dx$ mit Hilfe der Substitutionsregel. Setze dazu

$$g(y) = -\frac{y-2}{3}$$

$$g'(y) = -\frac{1}{3}$$

Daher ist:

$$\int (2-3x)^4 dx = \int y^4 \left(-\frac{1}{3}\right) dy \\ = -\frac{1}{15} y^5 = -\frac{1}{15} (2-3x)^5$$

In der Praxis verwendet man die Substitutionsregel häufig in einer etwas anderen Form.

Nun schreibt:

$$t = (2-3x)$$

$$dt = -3 dx, \quad dx = -\frac{1}{3} dt$$

$$\Rightarrow \int (2-3x)^4 dx = \int -\frac{t^4}{3} dt \\ = -\frac{1}{15} t^5 = -\frac{1}{15} (2-3x)^5$$

(d) Berechne $\int 3x^2 e^{x^3} dx$ mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$t = x^3, \quad dt = 3x^2 dx$$

$$\Rightarrow \int 3x^2 e^{x^3} dx = \int e^t dt \\ = e^t = e^{x^3}$$

(e) Für das Integral

$$\int \frac{6x^2 + 2\cos x}{x^3 + \sin x} dx$$

verwenden nur den Spezialfall
"logarithmische Integration" der
Substitutionsregel. Mit

$$f(x) = x^3 + \sin x,$$

$$f'(x) = 3x^2 + \cos x,$$

ist

$$\int \frac{6x^2 + 2\cos x}{x^3 + \sin x} dx = \int \frac{2 \cdot f'(x)}{f(x)} dx$$

$$= 2 \ln f(x) = 2 \ln(x^3 + \sin x)$$

Tricks und Rechenregeln für Integrale:

Integralrechnung wird häufig als relativ schwierig empfunden, da die einzigen Rechenregeln, partielle Integration und Substitutionsregel, in jedem Fall unendlich viele mögliche Aufspaltungen eines Produkts bzw. unendlich viele Substitutionen erlauben. Dies steht im Gegensatz zur Differentialrechnung, wo jede beliebige Kombination der elementaren Funktionen durch einfache Anwendung der Produkt-, Quotienten- und Kettenregel nach einem einfachen

Algorithmen berechnen lassen

Daher ist Integration in hohem Grade Erfahrungssache, damit die richtige Aufspaltung bzw. Substitution gemacht wird.

Wir wollen daher im folgenden noch eine Reihe von Tricks für häufig vorkommende Situationen betrachten.

1. Integration rationaler Funktionen

Integral der Form

$$\int \frac{Z(x)}{N(x)} dx$$

mit Polynomen $Z(x)$ und $N(x)$ können immer, wenn auch manchmal mit erheblichem Aufwand berechnet werden.

Wir betrachten zunächst zwei einfache Fälle:

a) Mit der Substitution $u = cx + d$ ist

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{cx+d} &= \frac{1}{c} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{c} \ln|u| \\ &= \frac{1}{c} \ln|cx+d| \end{aligned}$$

und ebenso

$$\int \frac{dx}{c(x+d)^n} = \frac{1}{c} \int \frac{du}{u^n}$$

$$= \frac{-1}{c(n-1)} \frac{1}{c(x+d)^{n-1}}$$

(b) Für das Integral

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

formt man den Nenner durch quadratische Ergänzung um:

$$ax^2+bx+c = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \right\}$$

$$= a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \alpha \right\}$$

mit $\alpha = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$.

Mit der Substitution $u = x + \frac{b}{2a}$ folgt zunächst

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2+\alpha},$$

und das Ergebnis hängt vom Vorzeichen von $\Delta = 4ac - b^2$ ab:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & \Delta > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctanh} \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & \Delta < 0 \end{cases}$$

Für Zähler vom Grad 1 hat man

$$a) \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx =$$

$$\int \frac{\frac{p}{2a}(2ax+b) + (q - \frac{pb}{2a})}{ax^2+bx+c} dx =$$

$$\frac{p}{2a} \underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx}_{\frac{f'(x)}{f(x)}} + \frac{2aq-pb}{2a} \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{\text{p.o.}}$$

b) Ebenso zerlegt man f. n>1:

$$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \frac{p}{2a} \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} dx + \frac{2aq-pb}{2a} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Für das erste Integral ist:

$$u = ax^2+bx+c \Rightarrow du = (2ax+b) dx$$

Daher:

$$\begin{aligned} \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} dx &= \int \frac{du}{u^n} \\ &= \frac{1}{1-n} u^{-n+1} \end{aligned}$$

Für das zweite Integral macht man den Ansatz

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{ux+v}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \int \frac{w}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} dx$$

mit zu bestimmenden Konstanten u, v, w .
 Differentiation der Gleichung und
 Multiplikation mit $(ax^2+bx+c)^n$ er-
 gibt

$$1 = (ax^2+bx+c) \cdot u - (ux+v)(2ax+b) + w(ax^2+bx+c)$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$u = \frac{2a}{(n-1)(4ac-b^2)}, \quad v = \frac{b}{(n-1)(4ac-b^2)},$$

$$w = \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac-b^2)}$$

Damit folgt das ursprüngliche Inte-
 gral aus den oben behandelten

Der allgemeinen Fall rationaler Funk-
 tionen behandelt man dann mit einer
 Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{Z(x)}{N(x)} dx$$

1. Ist $\text{Grad } Z(x) \geq \text{Grad } N(x)$, so führe man eine Polynomdivision durch. Es ergibt sich dann ein Polynom und eine rationale Funktion Z/N , für die $\text{Grad } Z < \text{Grad } N$ ist.

Exkurs: (Polynomdivision)

Für eine rationale Funktion

$$\frac{Z(x)}{N(x)}$$

läßt sich für $\text{Grad } Z(x) \geq \text{Grad } N(x)$ folgende äquivalente Umformung durchführen:

(1) Man ordne $Z(x)$, $N(x)$ nach fallenden Potenzen von x

(2) Man teile den 1. Summanden von $Z(x)$ durch den 1. Summanden von $N(x)$. Das ergibt den ersten Summanden des Gesamtresultates.

(3) Man multipliziere $N(x)$ mit dem zuletzt erhaltenen Summanden des Gesamtresultates

(4) Man subtrahiere dieses vom jeweils vorhergehenden Polynom

(5) ist für das Resultat der Zählergrad mindestens der Nennergrad, so fahre man mit (2) fort. Andernfalls ergänze man das Ergebnis um den Restbruch und ist fertig.

Beispiele:

$$(a) \quad (x^3 - 2x^2 - 9x + 18) : (x - 2) = x^2 - 9$$

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2) \\ \hline 0 + 0 - 9x + 18 \\ - 9x + 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(b) \quad (x^3 + 6x^2 + 12x + 1) : (x^2 - 3x + 1) = x + 9 + \frac{38x - 8}{x^2 - 3x + 1}$$

$$\begin{array}{r} (x^3 + 6x^2 + 12x + 1) \\ - (x^3 - 3x^2 + x) \\ \hline 0 + 9x^2 + 11x + 1 \\ - (9x^2 - 27x + 9) \\ \hline 0 + 38x - 8 \end{array}$$

2.

Man bestimme die Nullstellen des Nennerpolynoms. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ergibt sich eine Faktorzerlegung.

$$N(x) = (x - a)^k (x - b)^l \dots (x^2 + px + q)^m (x^2 + rx + s)^n \dots,$$

wo $a, b, \dots$ reelle Nullstellen von $N(x)$

mit Vielfachheiten k_1 und (x^2+px+q) , (x^2+rx+s) , ... Paaren von konjugiert komplexen Nullstellen der Vielfachheiten $m, m, \dots$ entsprechen.

3.

Unter der Voraussetzung, daß
 $\text{Grad } Z < \text{Grad } N$

macht man den Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{Z(x)}{N(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} \\ & + \dots \\ & + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2} \\ & + \dots + \frac{P_mx+Q_m}{(x^2+px+q)^m} \\ & + \frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)} + \dots + \frac{R_nx+S_n}{(x^2+rx+s)^n} \\ & + \dots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten bestimmt man, indem man die rechte Seite auf den Hauptnenner $N(x)$ bringt und Koeffizientenvergleich im Zähler durchführt (Das entsprechende Gleichungssystem ist immer eindeutig lösbar.)

4.

Berechne die ~~Integral~~ der Summanden auf der rechten Seite mit den oben besprochenen Methoden.

Beispiel:

Betrachte das Integral

$$\int \frac{x dx}{(x+2)^2(x-1)}$$

Ausatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1}$$

Hauptnenner:

$$x = A(x+2)(x-1) + B(x-1) + C(x+2)^2$$

Koeffizientenvergleich:

$$x^2: 0 = A + C$$

$$x^1: 1 = A + B + 4C$$

$$x^0: 0 = -2A + B + 4C$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{9}, B = \frac{2}{3}, C = \frac{1}{9}$$

also:

$$\int \frac{x dx}{(x+2)^2(x-1)} = -\frac{1}{9} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$+ \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{9} \ln|x+2| - \frac{2}{3} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{9} \ln|x-1|$$

2. Integration nicht-rationaler Funktionen

(a) Integrale der Form

$$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}}) dx,$$

wo $R(x)$ eine rationale Funktion, behandelt man mit der Substitution

$$t = \sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}}, \quad x = \frac{st^m - q}{p - rt^m}$$

$$\Rightarrow dx = m t^{m-1} \frac{sp - rq}{(p - rt^m)^2} dt$$

Daher lassen sich die Methoden aus dem vorhergehenden Abschnitt verwenden.

(b) Eine rationale Funktion in $\sinh x$, $\cosh x$ ist auch eine rationale Funktion in e^x . Daher lassen sie sich mit der Substitution $u = e^x$ behandeln.

(c) Integrale der Form

$$\int R(\cos x, \sin x) dx$$

werden durch die Substitution

$$u = \tan \frac{x}{2}$$

im Integral über rationale Funktionen überführt. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\cos x &= 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + u^2} - 1 = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2u}{1 + u^2}\end{aligned}$$

und:

$$dx = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} du = \frac{2}{1 + u^2} du$$

Wie man sieht, ist Integration eine Kunst mit vielen Tricks um knifflige Fälle zu behandeln.

4.5. Uneigentliche Integrale

Berechnet man Integrale mit Grenzen a oder $b \rightarrow \pm\infty$ oder mit Grenzen an den inneren Rändern des Definitionsbereiches des Integranden, so kommen Grenzwertbetrachtungen und Integralrechnung zusammen.

Definition:

(a) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert man die uneigentlichen Integrale

$$\begin{aligned}\int_a^\infty f(x) dx &:= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^c f(x) dx &:= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &:= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx.\end{aligned}$$

Dabei hängt der Wert des letzten Integrals nicht von der Wahl des Punktes c ab.

(b) Sei $a < c < b$ und sei $f: [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert man die uneigentlichen Integral

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^t f(x) dx + \int_t^b f(x) dx$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \int_0^{\infty} \cos x dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b \text{ existiert nicht!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_a^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

(siehe Übungen)

Es lassen sich Kriterien für die Konvergenz von uneigentlichen Integralen angeben:

Satz: (Cauchy-Kriterium)

(a) Für eine stetige Funktion existiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $b_0 > a$ gibt, so daß

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall b_2 > b_1 \geq b_0.$$

Entsprechendes gilt für das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx.$$

(b) Für eine stetige Funktion $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ existiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^{b_0} f(x) dx$$

genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein c_0 , $a < c_0 < b$ gibt, so daß

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall c_0 \leq c_1 < c_2 \leq b.$$

Entsprechendes gilt für das uneigentliche Integral

$$\int_{c_1}^b f(x) dx.$$

Die Beweise verschieben wir wieder auf die Analysisvorlesungen.

Es ist nützlich, auch hier den Begriff der absoluten Konvergenz einzuführen.

Definition:

Man nennt eines der uneigentlichen Integrale

$$\int_a^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^a f(x) dx, \int_a^{b_0} f(x) dx$$

bzw. $\int_{a_0}^b f(x) dx$

absolut konvergent und f absolut integrierbar, wenn das jeweilige Integral

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx, \int_{-\infty}^a |f(x)| dx, \int_a^{b_0} |f(x)| dx$$

bzw. $\int_{a_0}^b |f(x)| dx$

konvergiert

Dann gilt folgender

Satz: Ein absolut konvergentes uneigentliches Integral ist konvergent.

Beweis:

Wir betrachten exemplarisch den Fall des Integrals

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

Nach Voraussetzung ist dieses absolut konvergent, d.h. nach dem Cauchy Kriterium ex. ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon \quad \forall b_2 > b_1 \geq b_0$$

Nun ist aber

$$\left| \int_a^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_a^{\beta} |f(x)| dx$$

und daher

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

□

Umgekehrt zeigt das Beispiel

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$$

ein konvergentes, aber nicht absolut konvergentes Integral (siehe Übungen).

Um weitere Konvergenzkriterien abzu-leiten helfen wir kurzzeitig der Frage der Konvergenz von Reihen zurück.

Exkurs: Konvergenzkriterien für Reihen

Zur Entscheidung über die Konvergenz einer unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

vergleicht man gleichweise mit einer Reihe, deren Konvergenzverhalten be-kannt ist. Es gilt folgender

Satz: (Majorantenkriterium)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine gegebene Reihe

(a) Gibt es eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ mit $c_n \geq 0 \forall n$, so daß

$$|a_n| \leq c_n$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

absolut konvergent, und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ heißt eine konvergente Majorante.

(b) Gibt es eine divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ mit $d_n \geq 0$ für, so daß

$$|a_n| \geq d_n$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent, und $\sum d_n$ heißt eine divergente Minorante.

Mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

lassen sich hieraus folgende Kriterien ableiten.

Satz 2: (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

(a) Gibt es eine Konstante $0 < q < 1$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

c) Gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Satz 2.00 (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

ca) Gibt es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, so daß

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \quad \forall \text{ fast } n \in \mathbb{N},$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

cb) Gilt dagegen

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \quad \forall \text{ fast } n \in \mathbb{N},$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent.

Mit Hilfe von ungenügenden Integralen können wir nun ein weiteres Konvergenzkriterium angeben.

Satz: (Integralkriterium)

Sei $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine monoton fallende, stetige und nichtnegative Funktion. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergent} \iff$$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergent}$$

Beispiel:

Betrachte die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n = \frac{1}{n^s}$$

Die Funktion $f(x) = x^{-s}$ ist für $s > 0$ monoton fallend. Es ist

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^s} dx$$

$$\stackrel{s \neq 1}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{-s+1} x^{-s+1} \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \right)$$

$$\stackrel{s > 1}{=} - \frac{1}{1-s}$$

so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s > 1$

konvergiert.

Ein Majorantenkriterium lässt sich analog auch für unendliche Integrale angeben.

Satz: (Majorantenkriterium)

Sei $a \leq b \leq +\infty$ und $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$0 \leq h(x) \leq |f(x)| \leq g(x) \quad \text{f. } a \leq x < b.$$

Dann gilt:

$$\int_a^b |f(x)| dx \begin{cases} \text{konvergent falls } \int_a^b g(x) dx \text{ konv.} \\ \text{divergent falls } \int_a^b h(x) dx \text{ div.} \end{cases}$$

Es lässt sich wiederum ein Kriterium für den Quotienten von Funktionen angeben.

Satz: (Vergleichskriterium)

Seien $f(x), g(x)$ auf $[a, \infty)$ stetig und positiv, a.s.c.

(a) Wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty$$

ist, so haben die Integrale $\int_a^\infty f(x) dx$ und $\int_a^\infty g(x) dx$ dasselbe Konvergenzverhalten.

cs) Wenn

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty$$

ist, so haben die Integrale $\int_{c^+}^a f(x) dx$ und $\int_{c^+}^a g(x) dx$ dasselbe Konvergenzverhalten.

Der Beweis folgt direkt aus dem Majorantenkriterium.

Mit ähnlichen Methoden lassen sich weitere Konvergenzkriterien ableiten, was wir aber auf die Analysis vorlesungen verschieben.

4.6. Parameterabhängige Integrale und die Gammafunktion

Häufig betrachtet man ungerendliche

Integrale, die noch von zusätzlichen Parametern abhängen, etwa

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

und man fragt sich, von welcher Art die Abhängigkeit von den Parametern ist.

Für solche Situationen definieren wir

Definition

Sei

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < +\infty, c \leq y \leq d\}$$

und sei $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $b_n \rightarrow \infty$ eine beliebige Zahlenfolge. Existiert der Limes

$$\varphi(y) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_b^{b_n} f(x, y) dx$$

für jedes $y \in [c, d]$, so heißt

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx =: \varphi(y)$$

konvergent bzgl. y .

Es gilt hierfür nun folgendes

Satz:

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und positiv. Ist dann

$$\int_a^\infty g(x) dx$$

konvergent und gilt

$$|f(x, y)| \leq g(x) \quad \forall y \in [a, b],$$

so ist

$$\int_a^\infty f(x, y) dx$$

absolut konvergent

Beispiel:

Betrachte

$$f(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx$$

Es gilt:

$$|e^{-xy} \sin x| \leq e^{-x} \quad \text{für } y \geq 1$$

und $\int_0^\infty e^{-x} dx$ ist konvergent

Daher ist $f(y)$ absolut und gleichmäßig konvergent

Es ist:

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-xy} \sin x \, dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e^{-xy}}{1+y^2} (-y \sin x - \cos x) \right\}_{x=0}^{x=b} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e^{-by}}{1+y^2} (-y \sin b - \cos b) + \frac{1}{1+y^2} \right\} \\ &= \frac{1}{1+y^2} \quad | \end{aligned}$$

wobei man das Integral durch zweifache partielle Integration löst.

Für solche Parameterintegrale gilt nun folgendes

Satz 2: Sei $f(x,y)$ stetig f. $x \geq a$, $C \leq y \leq d$.

Wenn das Integral

$$\varphi(y) = \int_a^\infty f(x,y) \, dx$$

gleichmäßig auf $C \leq y \leq d$ konvergiert,
dann ist $\varphi(y)$ stetig auf $[C,d]$ und
es gilt f. $y_0 \in [C,d]$:

$$\varphi(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\infty f(x,y) \, dx$$

$$\underline{!} \quad \int_a^\infty \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^\infty f(x, y_0) dx$$

Wir betrachten nun insbesondere das oben angeführte uneigentliche Integral,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Für dieses doppelt-uneigentliche, parameterabhängige Integral gilt:

Satz: (Gammafunktion)

(a) Für alle $x > 0$ existiert die Euler-
sche Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

und stellt eine C^∞ -Funktion dar.

(b) Die Γ -Funktion erfüllt die Funk-
tionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

(c) Ferner gilt:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

$\Gamma(x)$ existiert genau dann, wenn

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{und} \quad \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

existieren.

(a) Es existiert $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_1^\infty = 1.$

Ferner ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t} t^{x-1}}{t^2} = 0$$

nach den Regeln von de l'Hospital.
Daher ist

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

nach dem Vergleichskriterium absolut u. gleichmäßig konvergent.

(b) Es sei

$$\alpha(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$$

Mit der Substitution $u = \frac{1}{t}$ folgt

$$\begin{aligned}\chi(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 e^{-\frac{1}{t}} t^{x-1} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{1/\varepsilon} e^{-\frac{1}{u}} u^{-x-1} du\end{aligned}$$

ist absolut und gleichmäßig konvergent, weil das Integral

$$\int_1^{\infty} u^{-x-1} du$$

für $x > 0$ konvergiert.

□