3. Komplexe Zahlen

In Abschnitt 1 hatten wir die Einführung der reellen Zahlen mit der Notwendigkeit der Lösung einfacher Gleichungen wie $x^2 = 2$ begründet.

Warum soll nun der Zahlenraum nochmals erweitert werden? Es gibt dafür eine Reihe verschiedener Motivationen:

(a) Die wichtigste ist die Tatsache, daß viele einfache algebraische Gleichungen in $\mathbb{R}$ keine Lösungen haben, etwa

$$az^2 + bz + c = 0$$

Aus der Schule wissen wir, daß

$$z_{1,2} = \frac{1}{2a}\left\{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right\}$$

die beiden Lösungen der Gleichung angibt. Wenn nun aber

$$b^2 - 4ac < 0,$$

so hat die Gleichung in $\mathbb{R}$ keine Lösung, da die Wurzel einer negativen Zahl dort nicht definiert ist. Dieses Verhalten ist in vielen

Anwendungen unerwünscht.

(b) Die Betrachtung von komplexen Funktionen vereinfacht und vereinheitlicht die Differentialrechnung. Insbesondere haben komplex differenzierbare (holomorphe) Funktionen immer eine Potenzreihenentwicklung und sind beliebig oft differenzierbar.

(c) Betrachtet man nochmals die Potenzreihe aus Übungsblatt 1,

$$\frac{1}{3+2x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{3^{k+1}} x^k ,$$

so erscheint es zunächst unverständlich, warum die Reihe rechts nur für $|x| < 3/2$ konvergiert, während die linke Seite für $|x| > 3/2$ sehr wohl definiert ist. Solches Verhalten läßt sich aus Polen der komplexen Fortsetzung der Funktion verstehen.

3.1. Die komplexe Einheit

Zur Lösung von Gleichungen wie die im Beispiel (a) schreiben wir formal für den Fall $b^2 - 4ac < 0$:

$$z_{1/2} = \frac{1}{2a}\left\{-b \pm \sqrt{-1}\sqrt{4ac-b^2}\right\}$$

und nennen $\sqrt{-1} =: i$, so daß

$$z_{1/2} = \frac{1}{2a}\left\{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}\right\}$$

die obige Gleichung für $b^2-4ac<0$ löst.

Diese Lösung ist damit eine sogenannte komplexe Zahl von der allgemeinen Form

$$z = x + iy,$$

dabei nennt man $x = \mathrm{Re}\,z$ den Realteil von z und $y = \mathrm{Im}\,z$ den Imaginärteil von z.

3.2. Rechenregeln für komplexe Zahlen

Um mit komplexen Zahlen umgehen zu können, müssen wir wissen wie man die Grundrechenarten mit ihnen durchführt.

Probieren wir:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\mathrm{Re}\,z = x} + i\underbrace{(y_1 + y_2)}_{y = \mathrm{Im}\,z}$$

ebenso:

$$z = z_1 - z_2 = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{x} + i\underbrace{(y_1 - y_2)}_{y}$$

Für die Multiplikation erhält man:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2 y_1y_2$$

Mit $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ folgt dann:

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Ebenso können wir die Division behandeln. Es ist

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$

denn:

$$z \cdot \frac{1}{z} = \frac{x(x+iy)}{x^2+y^2} - i\frac{y(x+iy)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2 - i^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

Aus diesen Rechnungen liest man ab, daß die bekannten Rechenregeln für reelle Zahlen auch hier gelten:

(a) Addition:

Assoziativgesetz: $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$

Kommutativgesetz: $z_1+z_2=z_2+z_2$
Neutrales Element: $0=0+i0$
Inverses Element: $-z$

(b) <u>Multiplikation:</u>

Assoziativgesetz: $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$
Kommutativgesetz: $z_1z_2 = z_2z_1$
Neutrales Element: $1=1+i0$
Inverses Element:

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

(c) <u>Distributivgesetz:</u>

$$(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1z_2+z_2z_3$$

Eine Menge mit diesen Eigenschaften heißt Körper. Daher:

<u>Satz:</u> Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bildet bzgl. der oben eingeführten Addition und Multiplikation einen Körper.

Man definiert dann für komplexe Zahlen noch zwei weitere Operationen:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\in\mathbb{R}$$

heißt der Betrag von z und

$$z^*=x-iy\in\mathbb{C}$$

die komplex konjugierte Zahl zu z.

Für diese Operationen kann man durch Nachrechnen leicht zeigen:

Satz: Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(a) $(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$, $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$,

$(z^*)^* = z$

(b) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

(c) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(d) $|z^*| = |z|$, $|z|^2 = z z^*$

(e) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

Betrachte z.B. (b):

$$\frac{1}{2}(z + z^*) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = \frac{1}{2}(2x)$$

$$= x = \mathrm{Re}\, z$$

Die anderen Beziehungen folgen ebenfalls direkt aus den Definitionen (Übung!).

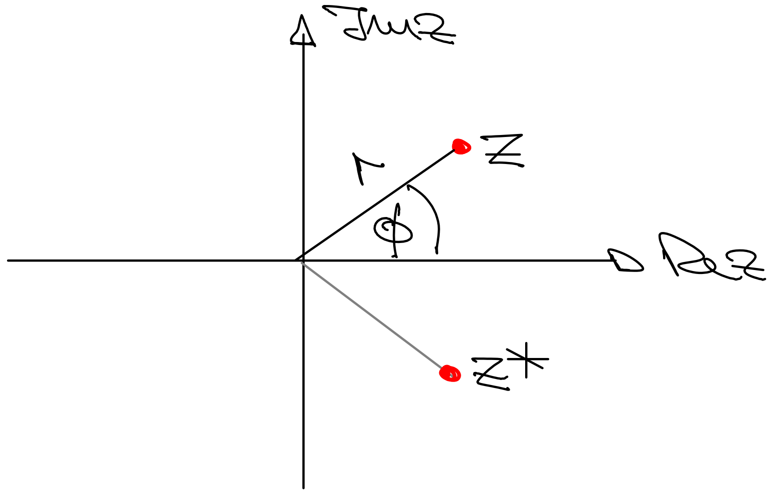
3.3. Polardarstellung und Eulersche Formel

Es ist oft nützlich, komplexe Zahlen als Paare $(\mathrm{Re}\, x, \mathrm{Im}\, x) \in \mathbb{R}^2$ zu betrachten, denn offenbar gibt es eine eineindeutige

Zuordnung

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \longleftrightarrow (\mathrm{Re}\,x, \mathrm{Re}\,y) \in \mathbb{R}^2$$

In diesem Zusammenhang nennt man $\mathbb{R}^2$ auch die komplexe Ebene mit der reellen Achse x und der imaginären Achse y.



Offensichtlich ist $|z| = r$ dann gerade der Abstand des Punktes $(\mathrm{Re}\,z, \mathrm{Im}\,z)$ vom Ursprung. Zusammen mit dem Winkel

$$\arg z \equiv \phi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Re}\,z}\right)$$

läßt sich dann eine komplexe Zahl alternativ durch Angabe von $|z|$ und $\arg z$ eindeutig bezeichnen.

Für die (reelle) Exponentialfunktion halten wir die Reihendarstellung

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Diese läßt sich verwenden, um die komplexe Exponentialfunktion zu definieren:

Satz: Die Potenzreihe

$$e^z \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ist für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent und heißt Exponentialfunktion von z.

(a) Für $\phi \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp(i\phi)^* = \exp(-i\phi)$$

(b) Für $\phi \in \mathbb{R}$ ist

$$|\exp(i\phi)| = 1$$

(c) Für $\phi \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp(i\phi) = \cos\phi + i\sin\phi$$

Eulersche Formel

Beweis:

(a) $\exp(i\phi) =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\Rightarrow \exp(-i\phi) = \exp(i\phi)^*$$

(b) $|\exp(i\phi)|^2 = \exp(i\phi)\exp(i\phi)^*$

$= \exp(i\phi)\exp(-i\phi)$

$= 1$

(c) folgt aus dem Vergleich des Ausdrucks in (a) mit den Taylorreihen von $\sin\phi$ und $\cos\phi$.

Damit haben wir also eine weitere Darstellung der komplexen Zahlen, denn für jedes $z \in \mathbb{C}$ können wir schreiben:

$$z = |z| e^{i\phi} = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Hieraus folgt ein Satz von großer praktischer Bedeutung:

Satz: (Formel von Moivre)

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i\sin nz$$

Beweis:

$$(\cos z + i\sin z)^n = e^{in\phi} = \cos nz + i\sin nz$$

$\square$

In der Polardarstellung wird auch das Multiplizieren von komplexen Zahlen wesentlich vereinfacht:

$$z_1 = r_1 e^{i\phi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$$

$$\Rightarrow \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1-\phi_2)}$$

3.4. Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen

Mit Hilfe der Eulerschen Formel lassen sich nun die trigonometrischen Funktionen in einer sehr nützlichen Form darstellen:

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

Ebenso hat man dann für $\tan x$ und $\cot x$:

$$\tan x = \frac{1}{i} \; \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

$$\cot x = i \; \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$$

Damit lassen sich nun die Formeln

für das Rechnen mit trigonometrischen Funktionen leicht herleiten:

(a) Betrachten wir

$$\sin(x+y) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}\right)$$
$$= \operatorname{Im} e^{i(x+y)}$$

Es ist aber

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$
$$= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$
$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$+ i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$$

Und daher:

$$\operatorname{Im} e^{i(x+y)} = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$

Damit ist

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$

Analog beweist man die weiteren Additionstheoreme.

(b) Betrachten wir nun

$$\sin(2x) = \frac{1}{2i}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)$$
$$= \operatorname{Im} e^{2ix}$$

Es ist nun:

$$e^{2ix} = e^{ix} e^{ix} = (\cos x + i \sin x)$$
$$\times (\cos x + i \sin x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x + i(\sin x \cos x$$
$$+ \cos x \sin x)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} e^{2ix} = 2 \sin x \cos x$$

Daher ist also:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Analog beweist man die restlichen Doppel- und Halbwinkelformeln.

Beispiel:

Die komplexe Darstellung ist oft sehr nützlich zur Betrachtung von Schwingungsvorgängen. Betrachten wir

$$z(t) = at + ibt, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

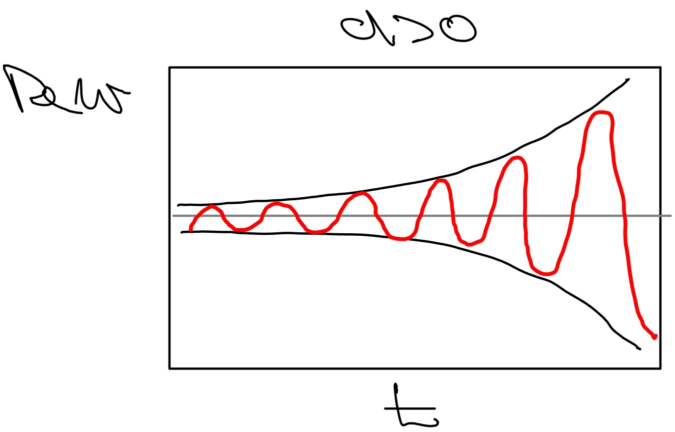
d.h. eine Gerade im Komplexen. Dann ist

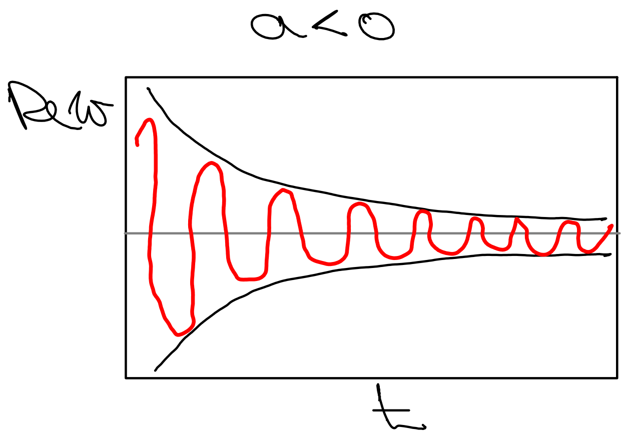
$$w(t) = e^{z(t)} = e^{at + ibt} = e^{at} e^{ibt}$$

und der Realteil ist

$$\operatorname{Re} w(t) = e^{at} \cos bt$$

Diese Form beschreibt eine gedämpfte ($a<0$) bzw. angefachte ($a>0$) Schwingung mit Periode $2\pi/b$.





Entsprechend stellt auch der Imaginärteil $\operatorname{Im} w(t)$ eine gedämpfte bzw. angefachte Schwingung dar.

Als Fortsetzung der Eulerformel für komplexe Argumente ist es nun natürlich zu definieren:

Satz: (Hyperbolische Funktion)

(a) Der Sinus hyperbolicus,

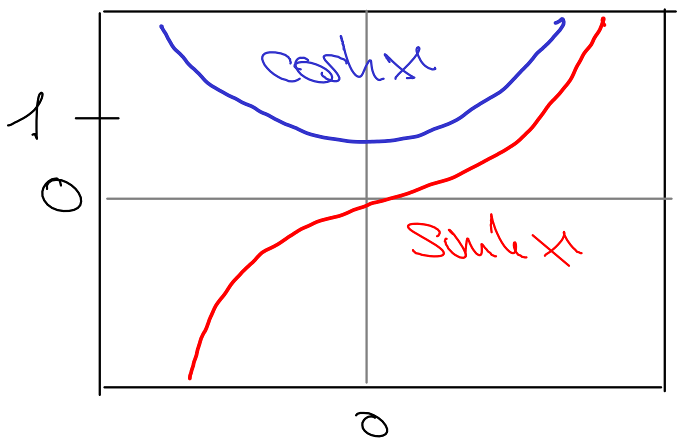
$$\sinh x \equiv \frac{1}{i}\sin(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und streng monoton wachsend mit Wertebereich $\mathbb{R}$.

(b) Der Cosinus hyperbolicus,

$$\cosh x \equiv \cos ix = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, $\cosh x \geq 1$, streng monoton fallend auf $]-\infty,0]$, streng monoton wachsend auf $]0,\infty[$ mit Wertebereich $[1,+\infty[$.



(c) Ebenso definiert man

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad x \neq 0$$

(d) Es gelten die Additionstheoreme

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

(e) Es gelten die Doppel- und Halbwinkelformeln

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$$

$$\sinh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)}$$

$$\cosh\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x + 1)}$$

Beweis:

Betrachte etwa (d):

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \cos^2(ix)$$
$$-\frac{1}{i^2}\sin^2(ix) = \cos^2(ix) + \sin^2(ix)$$
$$= 1$$

Die weiteren Beziehungen folgen aus ähnlich elementaren Betrachtungen.

Für die hyperbolischen Funktionen lassen sich im Monotoniebereich wiederum Umkehrfunktionen definieren:

Satz: (Areafunktionen)

(a) Die auf $\mathbb{R}$ definierte Umkehrfunktion von $\sinh x$ ist der Area Sinus hyperbolicus,

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Sie ist streng monoton wachsend mit Wertebereich $\mathbb{R}$.

(b) Die für $x \geq 1$ definierte Umkehrfunktion von $\cosh x$ heißt Area

Cosinus hyperbolicus,

$$\operatorname{arcosh} = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$$

Sie ist streng monoton wachsend mit Wertebereich $[0, \infty[$.

<u>Beweis:</u>

(a) Betrachten wir

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$
$$= \sqrt{1+\sinh^2 x} + \sinh x$$
$$= \sqrt{1+y^2} + y$$

$$\Longrightarrow \quad x = \operatorname{arsinh}(y) = \ln\left(\sqrt{1+y^2} + y\right)$$

(b) folgt analog.

Wir hatten oben in Abschnitt 2 für die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen auf die komplexe Darstellung verweisen. Daher betrachten wir jetzt:

(a)
$$\frac{d}{dx}\sin x = \frac{1}{2i}\left(\frac{d}{dx}e^{ix} - \frac{d}{dx}e^{-ix}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(ie^{ix} + ie^{-ix}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos x$$

(b) analog für $\frac{d}{dx}\cos x$.

(c) analog f. $\frac{d}{dx} \tan x$, $\frac{d}{dx} \cot x$.

(d) $$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx} e^{x} - \frac{d}{dx} e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \cosh x$$

(e) analog f. $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$

(f) In den Übungen zeigen wir noch

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

und entsprechende Formeln für $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{artanh} x$ u. $\operatorname{arcoth} x$.

3.5. Der Fundamentalsatz der Algebra

Wir hatten die Einführung der komplexen Zahlen u.a. damit begründet, daß wir für einige einfache polynomiale Gleichungen im Reellen keine Lösungen finden konnten.

Wie sieht es also mit Lösungen von Gleichungen der Form

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

im Komplexen aus?

Wir betrachten zunächst den einfacheren Fall, daß $a_n = 1$, $a_{n-1} = \dots = a_1 = 0$, $a_0 = -a$:

$$z^n = a$$

Im Reellen haben wir für $a > 0$:

$$x^2 = a \implies x = \pm\sqrt{a}$$

$$x^3 = a \implies x = \sqrt[3]{a}$$

$$x^4 = a \implies x = \pm\sqrt[4]{a} \quad \text{usw.}$$

d.h. es gibt immer nur ein oder zwei Lösungen.

Im Komplexen haben wir stattdessen:

$$z^n = a$$

$$z = r e^{i\phi}, \qquad a = s e^{i\psi}$$

$$\implies z^n = r^n e^{in\phi} = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

$$\overset{!}{=} a = s e^{i\psi} = s(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Das ist genau dann erfüllt, wenn

$$r^n = s, \quad \cos n\phi = \cos\psi, \quad \sin n\phi = \sin\psi$$

Da cos und sin 2π-periodisch sind, muß gelten:

$$r = \sqrt[n]{s}, \quad \phi = \frac{\psi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Hier gibt es also immer n versch. Lösungen!

Satz: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ hat die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right\}$$
$$= \sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\varphi+2k\pi)/n},$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Diese bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Kreis

$$|z| = \sqrt[n]{\rho}.$$

Im Falle $\rho = 1$ heißen die z_k die n-ten Einheitswurzeln.

Beispiele:

(a) Für die Gleichung

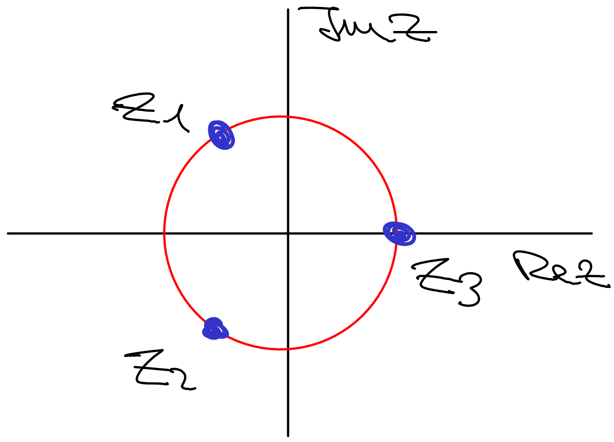
$$z^3 = 1$$

ist $\rho = 1$, $\varphi = 0$, d.h. sie hat die 3 Wurzeln

$$z_1 = e^{2i\pi/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$z_2 = e^{4i\pi/3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$z_3 = e^{6i\pi/3} = e^{2\pi i} = 1$$



(b) Die Gleichung

$$z^2 = -1,$$

die ursprünglich zur Definition der komplexen Einheit herangezogen wurde, hat die Lösungen

$$z_k = e^{i(\pi + 2k\pi)/2}$$
$$= e^{i\frac{2k+1}{2}\pi}, \quad k = 0, 1$$

also

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$
$$z_2 = e^{3\pi/2} = -i$$

Die Definition $i = \sqrt{-1}$ ist daher als symbolisch anzusehen, denn die

Gleichung $z^2 = -1$ hat zwei Lösungen. Zum Rechnen mit komplexen Zahlen braucht man aber lediglich die Beziehung $i^2 = -1$, die wieder eindeutig ist.

Für die oben angeführte allgemeine Gleichung gilt dann der folgende wichtige Satz:

Satz: (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \, , z \in \mathbb{C}$$

ein Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Dann besitzt $p(z)$ genau n Nullstellen

$$z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \text{ mit } p(z_k) = 0,$$

$$k = 1, \dots, n,$$

die nicht notwendig verschieden sind und es gilt

$$p(z) = a_n (z - z_n)(z - z_{n-1}) \cdots (z - z_1)$$

Der Beweis würde weit über das hier behandelte Themengebiet hinausführen.

Die Einführung der komplexen Zahlen hat also — wie gewünscht — dazu geführt, daß jede polynomiale Gleichung Lösungen hat.

Man beachte, daß es sich hierbei um einen Existenzsatz handelt, d.h es wird nicht gesagt wie man die Zk bestimmen kann. Tatsächlich ist für $n > 4$ kein allgemeines Verfahren zur (analytischen) Bestimmung der Zk bekannt.

Es gibt leider kein Analogon dieses Satzes im Reellen. Es gilt jedoch:

<u>Satz:</u>

Sei $p(z)$ ein Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten. Dann gilt:

(a) Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p(z)$, so auch z_0^* (d.h. die Nullstellen treten in komplex konjugierten Paaren auf).

(b) Ist n ungerade, so hat p wenigstens eine reelle Nullstelle $z_0 \in \mathbb{R}$.

Der Satz folgt direkt aus dem Fundamentalsatz der Algebra.

Beispiele:

(a) Wir hatten zuvor die quadratische Gleichung

$$az^2+bz+c=0, \quad a,b,c\in\mathbb{R}$$

betrachtet mit Lösungen

$$z_{1/2}=\frac{1}{2a}\left\{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right\}$$

Für $D=b^2-4ac<0$ hat man

$$z_{1/2}=\frac{1}{2a}\left\{-b\pm i\sqrt{-D}\right\}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

und es ist $z_1=z_2^*$. Für $D>0$ ist

$$z_{1/2}=\frac{1}{2a}\left\{-b\pm\sqrt{D}\right\}\in\mathbb{R},$$

so daß wieder $z_1=z_2^*$. Für $D=0$ ist

$$z_1=z_2=-\frac{b}{2a},$$

d.h. ebenfalls $z_1=z_2^*$.

(b) Die kubische Gleichung

$$az^3+bz^2+cz+d=0$$

hat, wie man zeigen kann, abhängig vom Vorzeichen einer entsprechenden Diskriminante entweder 3 reelle

Lösungen oder eine reelle und zwei komplex konjugierte Lösungen, in Übereinstimmung mit obigem Satz.

3.6. Komplexe Analysis

Um einen Einblick in die Nützlichkeit der Einführung der komplexen Zahlen auch für die Analysis zu gewinnen, wollen wir im folgenden einige Begriffe der komplexen Analysis umreissen.

Betrachtet man komplexe Funktionen, also Abbildungen

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

so läßt sich Differenzierbarkeit analog zum Fall reeller Funktionen definieren:

Definition: Eine komplexe Funktion

$$f: \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$$

heißt

(a) differenzierbar in $z_0 \in D$, wenn die komplexe Ableitung

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert

(3) holomorph oder komplex-analytisch in D, wenn f differenzierbar $\forall z_0 \in D$ und $f'(z_0)$ stetig.

Es gelten dann die gleichen Rechenregeln wie für die reelle Ableitung (Linearität, Produktregel usw.).

Man findet:

(a) jedes Polynom

$$f(z) = p_n z^n + \ldots + p_1 z + p_0$$

ist holomorph in $\mathbb{C}$

(b) jede rationale Funktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) = 0\}$

(c) auf der anderen Seite ist die einfache Funktion

$$f(z) = z^* = x - iy$$

in keinem Punkt komplex differenzierbar, obwohl sie als Funktion von x und y aufgefaßt sogar linear ist.

Man schreibe

$$z - z_0 = |z - z_0| e^{i\varphi}$$

Dann:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = (z-z_0)^* (z-z_0)^{-1} = e^{-2i\phi}$$

d.h. für noch so kleines δ, $|z-z_0|<\delta$ umfaßt der Differenzenquotient den gesamten Einheitskreis!

(d) Die komplexe Exponentialfunktion ist holomorph in ganz $\mathbb{C}$.

Auch wenn diese Eigenschaften noch relativ nah an der am Reellen geschulten Intuition liegen, so ergeben sich doch einige erstaunliche Resultate, etwa:

Satz: (Satz von Liouville)

Jede beschränkte holomorphe Funktion

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

ist konstant.

Wir können jedoch hier auf diese und weitere Resultate der komplexen Analysis nicht weiter eingehen.

Stattdessen wenden wir uns nochmals kurz den Potenzreihen zu, die wir oben für reelle Funktionen betrachtet hatten.

Während es im Reellen schwierig war zu entscheiden, ob die Taylorreihe einer Funktion gegen sie konvergiert, gilt im Komplexen:

Satz:

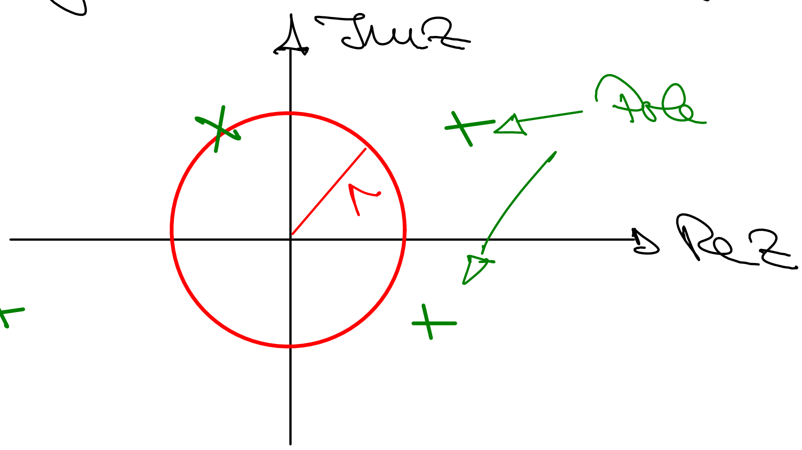
Ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph in

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}, r > 0,$$

so gilt für $|z - z_0| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Die Größe der Kreisscheibe $|z - z_0| < r$ ist dabei beschränkt durch die Pole der Funktion $f(z)$. Man nennt r den Konvergenzradius der Taylorreihe.



Damit läßt sich nun auch die Beschränkung der Gültigkeit der Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{3+2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+1}} x^k$$

auf den Bereich $|x| < \frac{3}{2}$ verstehen:
f hat einen Pol bei $x = -3/2$ und die Konvergenz einer Potenzreihe ist immer auf eine Kreisscheibe in der komplexen Ebene beschränkt.

Für eine Funktion wie etwa

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

liegen die Pole mit $z = \pm i$ auf der imaginären Achse. Dennoch ist die Konvergenz der entsprechenden Potenzreihe auch im Reellen auf $|z| < 1$ beschränkt.

Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe gilt:

Satz:

(a) Für jede Potenzreihe

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

existiert ein $0 \leq r \leq \infty$, der Konvergenzradius der Reihe, so daß gilt

(i) Die Reihe konvergiert nur für

$z = z_0$, falls $r = 0$

(ii) Die Reihe konvergiert in der offenen Kreisscheibe

$$U_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \},$$

falls $0 < r < \infty$, und die Reihe divergiert für $|z - z_0| > r$.

(iii) Die Reihe konvergiert in ganz $\mathbb{C}$ falls $r = +\infty$.

(b) Existiert einer der Grenzwerte

$$L := \begin{cases} \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ \lim_{n \to \infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \end{cases},$$

So ist

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls } L = +\infty \\ L^{-1}, & \text{falls } 0 < L < \infty \\ \infty, & \text{falls } L = 0 \end{cases}$$

<u>Beispiele:</u>

(a) Die Potenzreihe

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

hat Konvergenzradius $r = +\infty$, denn

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

(b) Unsere beliebte Beispielpotenzreihe

$$f(z) \sim \sum_{n=0} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}} x^n$$

hat den Konvergenzradius $r = \frac{3}{2}$, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\,3^{n+1}}{3^{n+2}\,2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{1}{L} = \frac{3}{2}$$

Für solche Funktionen mit Singularitäten läßt sich jedoch eine andere Art von Potenzreihenentwicklung durchführen:

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ und $f(z)$ holomorph in $D \setminus \{z_0\}$, wo z_0 eine isolierte Singularität von $f(z)$. Dann tritt genau einer der folgenden Fälle auf:

(a) Für $z \neq z_0$ in einer Umgebung von z_0 hat $f(z)$ die Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} c_n (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

(b) Für $z \neq z_0$ in einer Umgebung von z_0 hat $f(z)$ die Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n,$$

wobei $c_n \neq 0$ für beliebig große n.

Solche Reihendarstellungen nennt man Laurentreihen. Man nennt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^{-n}$$

bzw. $\sum_{n=1}^{N} c_n (z-z_0)^{-n}$

den Hauptteil der Laurentreihe.

Mit dem Verhalten der Laurentreihe lassen sich die auftretenden Singularitäten klassifizieren.

Man sagt: $f(z)$ hat in z_0

(a) eine hebbare Singularität, wenn der Hauptteil der Reihe verschwindet

(b) einen Pol der Ordnung N, wenn die höchste Ordnung im Hauptteil N ist

(c) eine wesentliche Singularität, wenn der Hauptteil unendlich viele Terme hat

Beispiele:

(a) Die Funktion $f_1(z) = \frac{z^n - 1}{z-1}$ ist f. $z_0 = 1$ nicht definiert, aber

$$f_2(z) = 1 + z + \dots + z^{n-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

ist eine holomorphe Fortsetzung von $f_1(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$.

(b) Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^5} - \frac{3}{(z-3)^2}$$

hat einen

Pol 1. Ordnung in $z_1 = 0$
Pol 2. Ordnung in $z_2 = 3$
Pol 5. Ordnung in $z_3 = 2$

(c) Die Funktion

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

hat eine wesentliche Singularität in $z_0 = 0$.