2. Funktionen und Ableitungen

2.1. Der Funktionsbegriff

Funktionen gehören zu den grundlegendsten Begriffen der Mathematik und spielen in nahezu allen Anwendungen der Mathematik in den anderen Wissenschaften eine entscheidende Rolle.

Entscheidend für den Funktionsbegriff ist die Eindeutigkeit der Zuordnung:

Definition: (Funktion)

Seien A, B Mengen.

(a) Dann ist das kartesische Produkt $A \times B$ die Menge

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$$

(b) Sei $D \subseteq A$. Eine Abbildung (Funktion) f aus A in B ist eine Vorschrift, die jedem $a \in D$ genau ein $b = f(a) \in B$ zuordnet, das sog. Bild von a unter f oder den Funktionswert von f an der Stelle a. Schreibe:

$$A \supseteq D \ni a \longmapsto f(a) \in B$$
$$f : D \longrightarrow B, \; D \subseteq A.$$

Man nennt: $D = D(f) \subseteq A$ den Definitionsbereich von f.

$R = R(f) = \{ b \in B \mid b = f(a) \text{ für ein } a \in D \}$ den Wertebereich von f.

$G = G(f) = \{ (a,b) \mid a \in D,\ b = f(a) \} \subseteq A \times B$ den Graph von f.

Für $D_0 \subseteq D(f)$ heißt $f(D_0)$ das Bild von D_0, und für $C \subseteq B$ heißt

$f^{-1}(C) = \{ a \in D \mid f(a) \in C \} \subseteq D$ das inverse Bild (Urbild) von C.

Beispiele:

(a) Die Folgen aus dem vorherigen Abschnitt sind Abbildungen

$$a_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

mit Definitionsbereich $D = \mathbb{N}$ und Wertebereich $R \subseteq \mathbb{R}$.

Noch weiter verbreitet sind sicherlich Funktionen im engeren Sinne, d.h. Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$$

(b) Man betrachte z.B. den Ort y eines Fahrzeugs, das zur Zeit $t=0$ mit konstanter Geschwindigkeit am Ort y_0 losfährt:

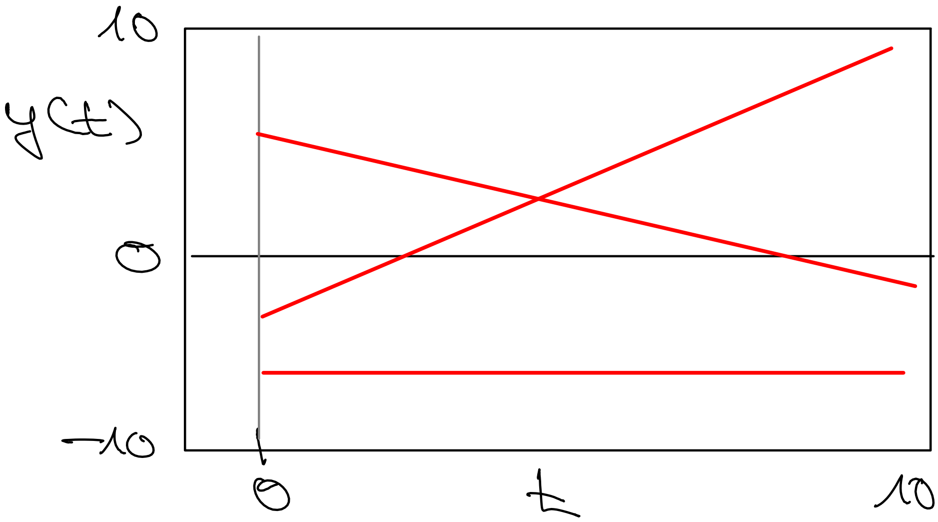
$$y(t) = y_0 + v \cdot t$$

Das ist eine Abbildung

$$\mathbb{R} \supseteq \mathbb{R}_0^+ \ni t \longrightarrow \mathbb{R},$$

d.h. der Definitionsbereich ist die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen $\mathbb{R}_0^+$ (die Zeiten). Der Wertebereich ist

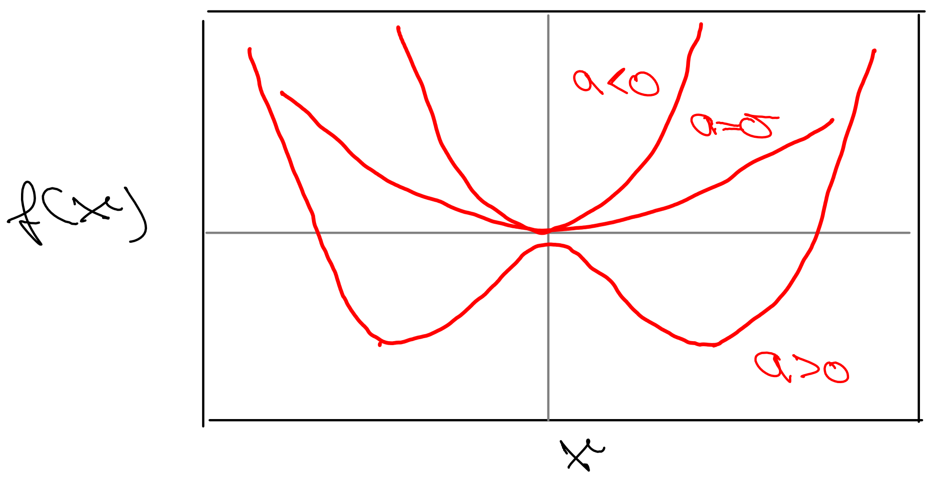
$$R(y) = \begin{cases} [y_0, \infty[& \text{für } v>0 \\ y_0 & \text{für } v=0 \\ ]-\infty, y_0] & \text{für } v<0 \end{cases}$$



Graph von $y(t)$

(c) Betrachte das Polynom

$$f(x) = -ax^2 + x^4$$



Der Definitionsbereich von $f(x)$ ist $D = \mathbb{R}$, der Wertebereich ist $R = \mathbb{R}_+$ f. $a \leq 0$ und $R = [-a^2/4, \infty[$ für $a > 0$.

Wir benötigen einige weitere Begriffe:

Definition: Sei $f: A \supseteq D \longrightarrow B$ eine Funktion.

(a) f heißt injektiv (eineindeutig), wenn $D \ni x_1, x_2$, $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. In diesem Fall existiert die inverse Abbildung

$$f^{-1}: B \supseteq R(f) \longrightarrow A$$

von f mit

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{f. } x \in D(f)$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{f. } y \in R(f)$$

(b) f heißt surjektiv, wenn $R(f) = B$ und f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

(c) Ist $g: B \supseteq D(g) \longrightarrow C$ eine zweite Funktion mit $R(f) \subseteq D(g)$, so heißt

$$h := g \circ f: A \supseteq D(f) \longrightarrow C$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \; x \in D(f)$$

die Komposition von g mit f.

Es ist nicht immer offensichtlich, wann eine Funktion injektiv und damit umkehrbar ist. In der Analysis wird dazu später ein wichtiger Satz bewiesen.

Definiert man Monotonie und Beschränktheit vollkommen analog zum Fall der Folgen, so ist klar:

Satz: (Umkehrfunktion)

Ist eine Funktion $A \supseteq D \to B$ streng monoton, so ist sie injektiv und damit umkehrbar

Offensichtlich ist $f(t) = y_0 + vt$ aus Bsp. (a) für $v \neq 0$ streng monoton und damit injektiv mit Umkehrfunktion

$$g(y) = \frac{y - y_0}{v},$$

denn: $g(f(t)) = \dfrac{y_0 + vt - y_0}{v} = t$.

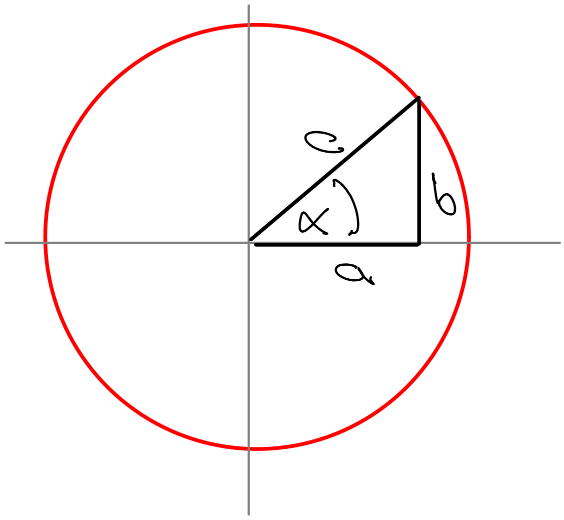
2.2. Elementare Funktionen

Erinnern wir uns an die Eigenschaften einiger in der Schule definierter, sogenannter elementarer Funktionen!

Polynome betrachten wir in Abschnitt 3 im Zusammenhang mit komplexen Zahlen.

1. Winkelfunktionen

Man erinnere sich an die Definition der Winkelfunktionen anhand des Einheitskreises



$\sin\alpha = \frac{b}{c}$

$\cos\alpha = \frac{a}{c}$

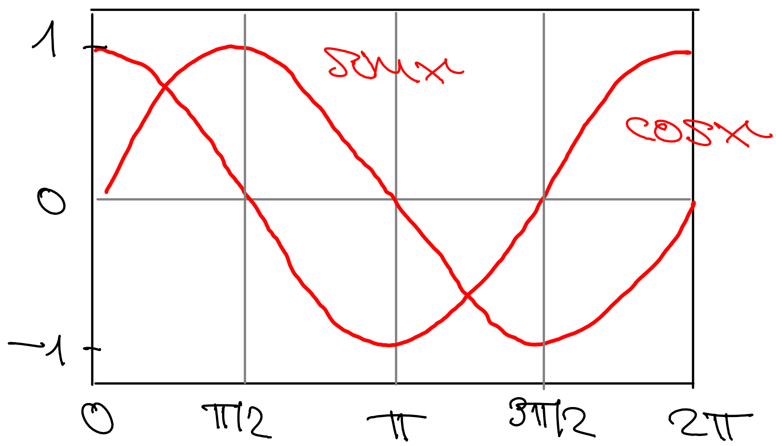
$\tan\alpha = \frac{b}{a}$

Es lassen sich die folgenden Eigenschaften ableiten:

Satz: (Winkelfunktionen)

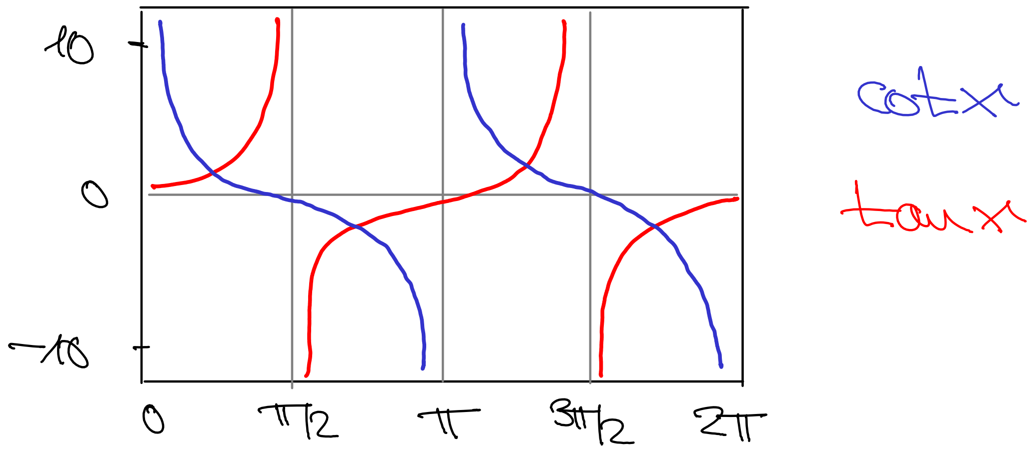
(a) Die Funktion $\sin x$ und $\cos x$ sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, 2π-periodisch mit Wertebereich $[-1,1]$ und es gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$



(b) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ist für alle $x \neq \dfrac{2k+1}{2}\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ definiert und π-periodisch;

$\cot x = 1/\tan x$ ist für alle $x \neq \pi k$ definiert



(c) Es gelten die Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

(d) Doppel- und Halbwinkelformeln

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Die elementaren Eigenschaften aus (a) folgen direkt aus der Definition, etwa

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}$$
$$= \frac{1}{c^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{c^2} = 1$$

(c) und (d) lassen sich später mithilfe der komplexen Darstellung beweisen.

Winkelfunktionen treten in der Physik bei allen Schwingungs- und Pendelproblemen auf.

Für die Bereiche, auf denen die Winkelfunktionen sin, cos, tan und cot monoton sind, lassen sich auch die entsprechenden Umkehrfunktionen definieren.

Satz: (Arcusfunktionen)

$\sin x$ ist auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und hat dort die Umkehrfunktion

$$\arcsin x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \quad -1 \le x \le 1$$

$\cos x$ ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend und hat dort die Umkehrfunktion

$$\arccos x \in [0, \pi], \quad -1 \le x \le 1$$

$\tan x$ ist auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend und hat dort die Umkehrfunktion

$$\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad -\infty < x < \infty$$

$\cot x$ ist auf $]0,\pi[$ streng monoton fallend und hat dort die Umkehrfunktion

$$\operatorname{arccot} x \in]0,\pi[, \quad -\infty < x < \infty$$

Für die Arcusfunktionen gelten entsprechende Umrechnungsformeln wie für die Winkelfunktionen, für die wir auf die üblichen Formelsammlungen verweisen (z.B. Bronstein).

2. Exponential- und Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion und ihre Umkehrung, die Logarithmusfunktion, sind möglicherweise die wichtigsten Funktionen der angewandten Mathematik, die in vielen Zusammenhängen, von der Zinseszinsrechnung, über das Bakterienwachstum bis zur Analyse sog. linearer Systeme auftritt.

Bei vielen Wachstumsprozessen ist die Änderung $\Delta y(t)$ einer Größe y zum Zeitpunkt t proportional zur Größe $y(t)$ selbst:

$$\Delta y(t) = \alpha\, y(t)$$

Wie wir später sehen werden, führen solche Zusammenhänge natürlicherweise zum Auftreten einer Exponentialfunktion.

Satz: (Exponentialfunktion)

Die Exponentialfunktion $\exp = e^x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, streng positiv, streng monoton wachsend mit Wertebereich $]0,+\infty[$ und erfüllt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

$$\text{bzw. } e^{x+y} = e^x e^y$$

Der natürliche Logarithmus

$$\ln x, \quad 0 < x < \infty$$

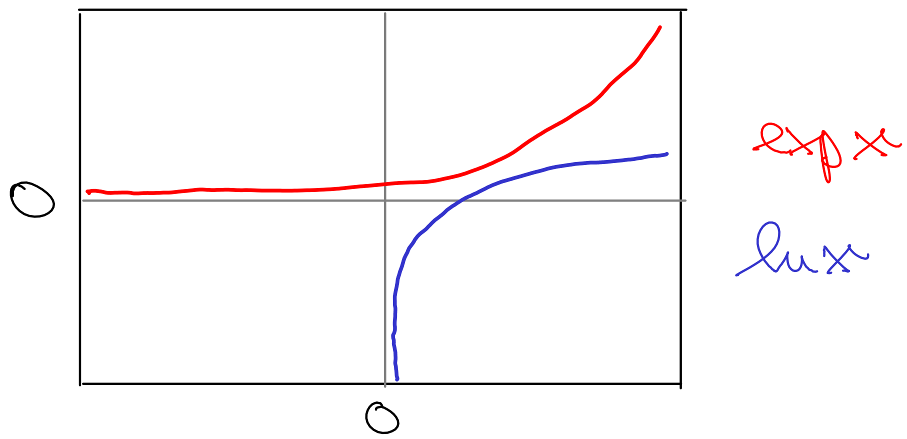
ist die Umkehrfunktion von e^x mit

$$\ln x < 0 \text{ für } 0 < x < 1, \; \ln 1 = 0,$$
$$\ln e = 1, \; \ln x > 0 \text{ für } x > 1,$$

ist streng monoton wachsend und erfüllt

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$$
$$x, y > 0$$

Es gilt: $\qquad a^b = e^{b \ln a} \quad$ für $a > 0$



2.3. Stetigkeit

Eine wichtige Eigenschaft reeller Funktionen und eine Vorbereitung auf den Begriff der Ableitungen ist die Stetigkeit, also die Abwesenheit von Sprüngen.

Zu ihrer Definition verallgemeinern wir den Begriff des Grenzwerts von Folgen auf Funktionen.

Definition: (Grenzwert und Stetigkeit)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) f hat in $x_0 \in I$ den Grenzwert $y_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodaß

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon \quad \text{falls } x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

(b) f heißt stetig in x_0, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, und stetig in I, wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist.

Die Stetigkeit von Funktionen ist eng mit der Grenzwertbildung von Folgen verbunden, denn es gilt:

Satz: (Folgenkriterium)

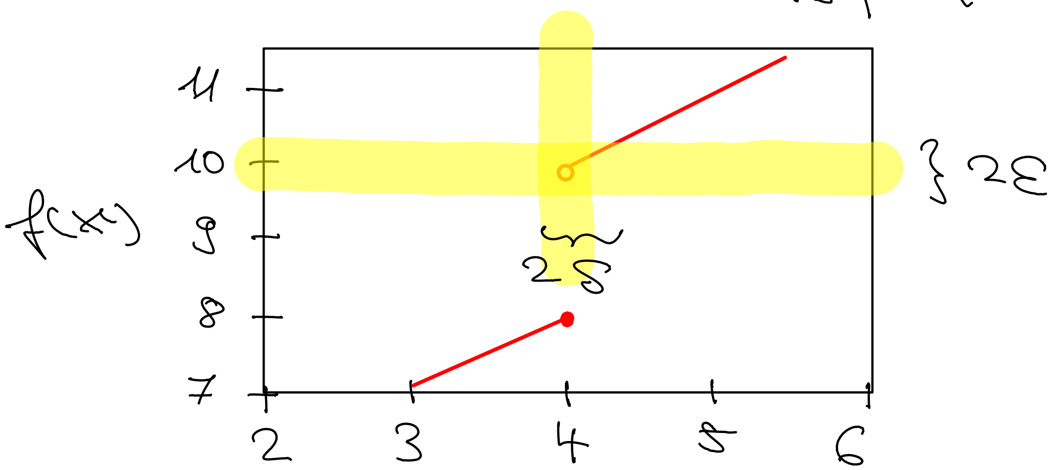
Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in I$, wenn für jede Folge $(x_n) \subset I$ gilt:

$$x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0)$$

Beispiele:

(a) Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & -\infty < x \leq 4 \\ x+6, & 4 < x < \infty \end{cases}$$



Offenbar hat $f(x)$ keinen eindeutigen Grenzwert für $x \to 4$, es lassen sich jedoch linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte definieren:

$$\lim_{x \to 4+} f(x) = 10, \qquad f(4) = 8,$$

$$\lim_{x \to 4-} f(x) = 8.$$

Dementsprechend ist $f(x)$ linksseitig stetig, aber nicht rechtsseitig stetig, und daher insgesamt unstetig.

(5) Durch die enge Verbindung der Grenzwertbegriffe bei Folgen und Funktionen ist klar, daß die Rechenregeln für Grenzwerte auch für Funktionen gelten.
Ebenso lassen sich dann Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ untersuchen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x+2}{x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}$$

$$= 2$$

Die Stetigkeit von Funktionen wird durch die elementaren Operationen erhalten, d.h. es gilt:

Satz:
Seien $f, g: I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) $f+g$, λf und $f \cdot g$ sind stetig in x_0.

(b) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

Sind $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $x_0 \in I$, $f(x_0) = y_0 \in J$, so ist $g \circ f$ stetig in x_0.

Diese Aussagen folgen direkt über das Folgenkriterium aus den entsprechenden Rechenregeln für konvergente Folgen.

Wir zitieren hier ohne Beweis einen Satz, der die Bedeutung des Begriffs der Stetigkeit aufzeigt.

Satz: (Zwischenwertsatz)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig

(a) Sind $x_1 \neq x_2$ in I und $y \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) < y < f(x_2)$, so gibt es ein x_0 zwischen x_1 und x_2 mit $f(x_0) = y$.

(b) f nimmt jeden Wert zwischen $\inf\limits_{x \in I} f(x)$ und $\sup\limits_{x \in I} f(x)$ an.

Mithilfe dieser Eigenschaft läßt sich beispielsweise die Existenz von Nullstellen beweisen.

Beispiel:

Man kann zeigen, daß $\cos x$ eine stetige Funktion ist. Aus der Beobachtung, daß

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1$$

folgt daher mit dem Zwischenwertsatz, daß $\cos x$ im Intervall $[0, \pi]$ (mindestens) eine Nullstelle haben muß.

Insbesondere können wir jetzt folgendes zeigen:

<u>Satz:</u> Eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist.

<u>Beweis:</u>

(a) Sei f streng monoton wachsend:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

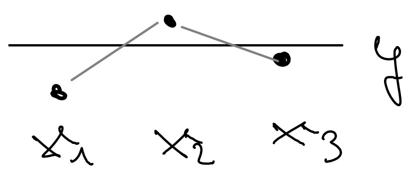
damit ist f injektiv:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

(b) Sei f injektiv. Angenommen, f ist <u>nicht</u> streng monoton. Dann existieren Punkte $x_1 < x_2 < x_3$, so daß $f(x_1) < f(x_2)$, aber $f(x_2) > f(x_3)$ und $f(x_1) < f(x_3)$. Sei $f(x_1) < y < f(x_2)$. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz Punkte $x_0' \in \,]x_1, x_2[$ und $x_0'' \in \,]x_2, x_3[$:

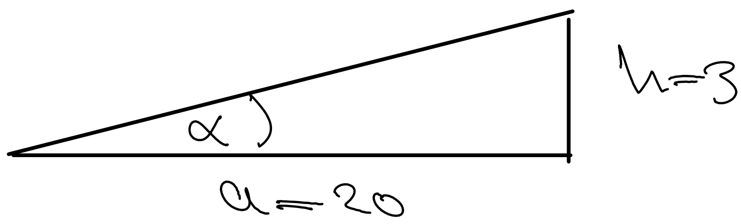
$$f(x_0') = y = f(x_0''),$$

im Widerspruch zur Injektivität $\square$



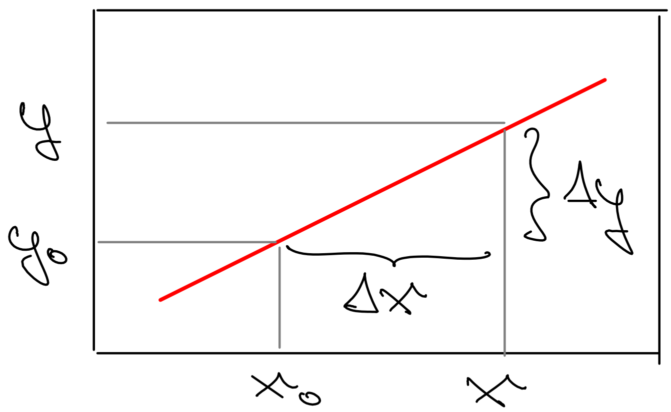
2.4. Ableitungen

Betrachten wir zunächst die Steigung wie man sie aus dem Autofahren kennt.



Eine Steigung von 15% bedeutet hier, daß $\tan\alpha = 15\% = 0{,}15$.

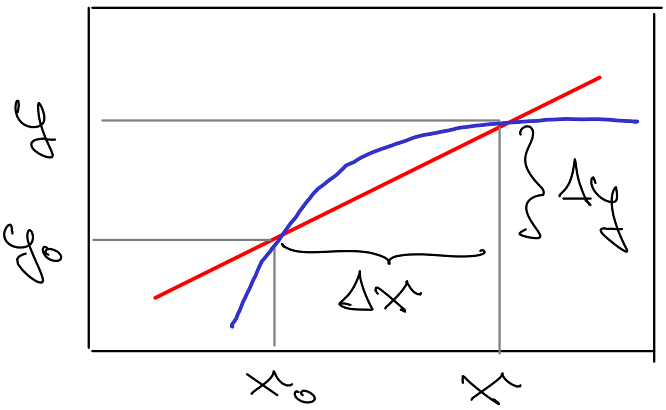
Im Zusammenhang mit Funktionen definiert man die (mittlere) Steigung wie folgt:



Die Steigung ist dann gegeben durch

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Für eine nicht geradlinig verlaufende Funktion ist diese Definition jedoch unbefriedigend:



m gibt in diesem Fall lediglich die mittlere Steigung an. Um die Steigung im Punkt x zu bestimmen, müssen wir stattdessen den Grenzübergang $x \to x_0$, also $\Delta x \to 0$ studieren.

Definition: (Differenzierbarkeit)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

(a) f heißt differenzierbar in $x_0 \in \,]a,b[$, wenn in x_0 die Ableitung

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. f heißt differenzierbar in $]a,b[$, wenn $f'(x_0)$ in jedem $x_0 \in \,]a,b[$ existiert.

(b) Man nennt

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0-0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

die linksseitige Ableitung und

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

die rechtsseitige Ableitung von f in x_0.

Mit diesen Definitionen gilt:

Satz:

Ist eine Funktion $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in]a,b[$, so ist sie auch stetig in x_0.

Beweis:

Schreibt man für $x, x_0 \in]a,b[$

$$r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0),$$

so kann man schreiben:

$$f(x) = f(x_0) + [f'(x_0) + r(x)](x - x_0),$$

wobei $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$. Daher folgt

$$f(x) \to f(x_0) \text{ für } x \to x_0 \qquad \square$$

Differenzierbarkeit einer Funktion ist also eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit.

Beispiele:

(a) Man betrachte die lineare Funktion

$$f(x) = x$$

Die Ableitung ist:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

(b) Man betrachte die reziprok-lineare Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Die Ableitung ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

(c) In den Übungen zeigen wir allgemeiner:

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \quad \forall n \neq 0$$

(d) Wir tragen aus obigen geometrischen Betrachtungen noch nach, daß offensichtlich

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

die Tangente an $f(x)$ im Punkt x_0 ist.

Für Ableitungen gelten einige wichtige Rechenregeln:

Satz: Seien $f, g \in I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in I.

(a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ diff'bar in I mit

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

(b) $f \cdot g$ ist differenzierbar und es gilt die Produktregel

$$(fg)'(x) = f(x) g'(x) + f'(x) g(x)$$

(c) f/g ist differenzierbar in Punkten $x \in I$ mit $g(x) \neq 0$ und es gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$$

(d) Ist f streng monoton in I, so ist $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

in allen Punkten $y = f(x)$ für die $f'(x) \neq 0$.

(e) Ist $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in I und $g: f(I) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $f(I)$, so ist $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ diff'bar in I und es gilt die Kettenregel

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Beweise:

(a) folgt als leichte Übung aus der Definition der Ableitung.

(b) folgt aus

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

und Grenzübergang $x \to x_0$.

(c) folgt aus

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \times \left\{ \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \right\}$$

und Grenzübergang $x \to x_0$.

(d) + (e) werden in den Mathematikvorlesungen bewiesen.

Beispiele:

(a) Aus Regel (a) und dem vorherigen Beispiel können wir nun jedes beliebige Polynom ableiten, etwa

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 16x + 2$$

(b) Aus der Quotientenregel läßt sich leicht auch eine Regel für reziproke Funktionen ableiten:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$$

Wir betrachten nun die Ableitungen der in Abschnitt 2.2. definierten elementaren Funktionen.

Satz:

(a) Die Exponentialfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

(b) Der natürliche Logarithmus ist für $x > 0$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

(c) Die trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

(d) Die Funktion $\tan x$ ist für alle $x \neq k\pi + \pi/2$ und die Funktion $\cot x$ ist für alle $x \neq k\pi$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

(e) Die Funktionen $\arcsin x$ und $\arccos x$ sind für $|x| < 1$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(f) Die Funktionen $\arctan x$ und $\operatorname{arccot} x$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar m.

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

Wir beweisen hier lediglich Teil (a):

Man kann leicht zeigen, daß

$$\exp x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt weiterhin, daß auch

$$\exp x \leq \frac{1}{1-x} \quad , x<1$$

Nun ist $\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$ und daher

$$x \leq \exp x - 1 \leq \frac{x}{1-x} \quad , -\infty < x < 1$$

und somit für $x \neq 0$

$$1 \leq \frac{\exp x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$$

Hieraus folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$$

Nun ist aber

$$\frac{d}{dx} \exp(x) \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\exp(x) - \exp(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \exp(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{\exp(x-x_0) - 1}{x - x_0}$$

$$\overset{s.o.}{=} \exp(x_0)$$

$\square$

Die Ableitung der Logarithmusfunktion folgt dann aus der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

Damit folgt nun insbesondere:

Satz:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$e^{x} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}.$$

Insbesondere ist die Eulersche Zahl gegeben durch

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Beweis: Es ist $\frac{d}{dx} \ln x \big|_{x=1} = 1$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln(1+h) = 1$$

Den Grenzwert können wir entlang einer Nullfolge bilden, etwa $h_n := x/n$:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n} \ln(1+h_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x} \left(1+\frac{x}{n}\right)$$

Nach Multiplikation mit x und Anwendung der Exponentialfunktion folgt die Behauptung. $\square$

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen beweisen wir weiter unten im Zusammenhang mit den komplexen Zahlen.

2.5. Höhere Ableitungen und Kurvendiskussion

Die oben eingeführten Ableitungsfunktionen sind u.U. selbst wiederum differenzierbar:

Definition: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt.

(a) Ist f differenzierbar in I und exist. die zweite Ableitung

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h},$$

so heißt f zweimal differenzierbar. Allgemein ist f in x_0 k-mal differenzierbar, wenn f in I $(k-1)$-mal differenzierbar ist und die Ableitung $f^{(k)}(x_0)$ der Funktion $f^{(k-1)}$ exist.

(b) Ist f k-mal diff'bar und ist die k-te Ableitung stetig in I, so heißt f k-mal stetig differenzierbar, oder $f \in C^k(I)$

Beispiel:

Für die Exponentialfunktion gilt

$$\frac{d^4}{dx^4} \exp(x) = \exp(x)$$

Höhere Ableitungen sind unter anderem für die Betrachtung von Extrem- und

Wendepunkten einer Funktion, die sogenannte Kurvendiskussion von Bedeutung.

<u>Satz:</u> Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $]a,b[$ ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) hat und in x_0 differenzierbar ist, so gilt $f'(x_0)=0$.

<u>Beweis:</u> f habe ein lokales Maximum in x_0, d.h. es gibt ein $\delta>0$:

$$f(x_0) - f(x) \geq 0 \quad f. \ |x-x_0|<\delta$$

Wegen

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \leq 0 & x_0<x<x_0+\delta \\ \geq 0 & x_0-\delta<x<x_0 \end{cases}$$

folgt die Behauptung für $x \to x_0$. $\square$

Weiterhin gilt:

<u>Satz:</u> Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Für $a<x_1<x_2<b$ gilt dann

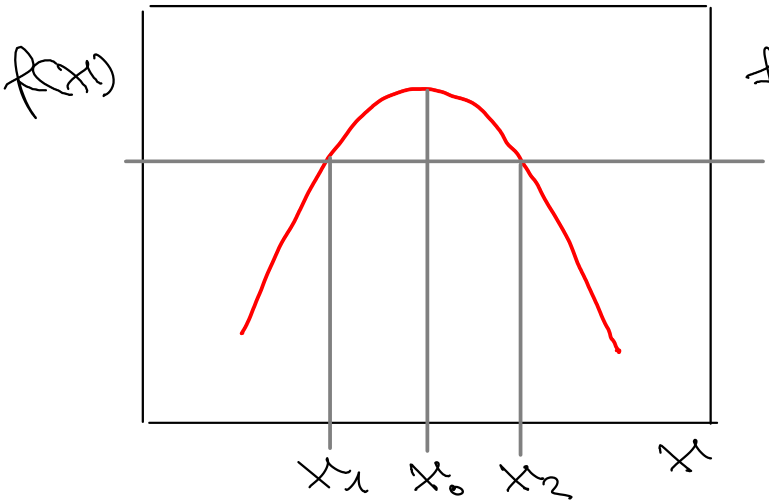
(a) Wenn $f(x_1)=f(x_2)$ ist, dann gibt es ein $x_0 \in]x_1,x_2[$ mit $f'(x_0)=0$.

(b) Es gibt ein $x_0 \in]x_1,x_2[$ mit

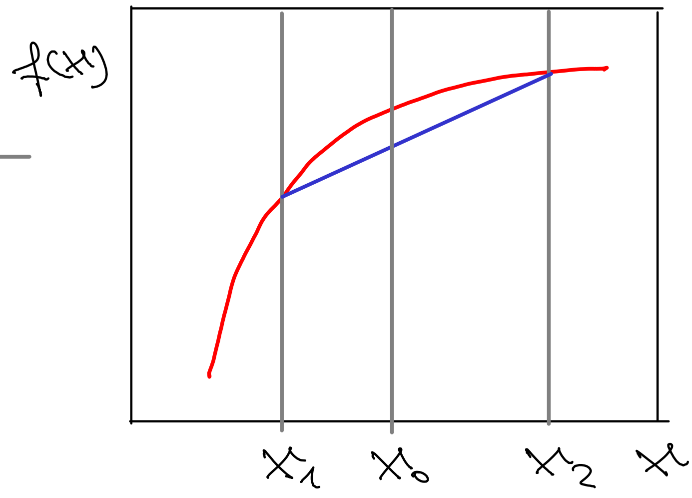
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_0)$$

Die Beweise lassen wir aus und betrachten stattdessen die anschauliche Bedeutung dieser Aussagen:

(a)



(b)



Insbesondere folgt nun hieraus:

Satz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a < x_1 < x_2 < b$

(a) $f'(x) \geq 0,\ x_1 \leq x \leq x_2 \iff f$ ist monoton wachsend in $[x_1, x_2]$

(b) $f'(x) = 0,\ x_1 \leq x \leq x_2 \iff f$ ist konstant auf $[x_1, x_2]$

(c) $f'(x) \leq 0,\ x_1 \leq x \leq x_2 \iff f$ ist monoton fallend in $[x_1, x_2]$

Schließlich läßt sich aus der zweiten Ableitung einer Funktion auch noch auf die Art einer Extremstelle schließen:

Satz: f sei in x_0 zweimal differenzierbar. Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ($f''(x) > 0$), so hat f in x_0 ein lokales Maximum (Minimum).

Beispiele:

(a) Die Funktion

$$f(x) = -2x^2 + x^4$$

hat drei Extremwerte:

$$f'(x) = -4x + 4x^3$$
$$= 4x(x^2 - 1)$$
$$= 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_1 = 0, \; x_{2|3} = \pm 1$$

Es ist $f''(x) = 12x^2 - 4$ und damit

$$f''(x_1) = -4 < 0 \Longrightarrow \text{Maximum}$$

$$f''(x_{2|3}) = 8 > 0 \Longrightarrow \text{Minimum}$$

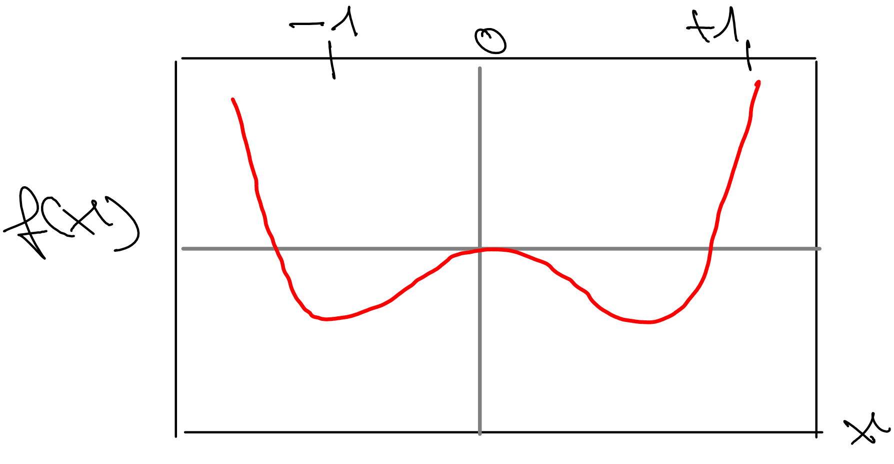
Es ist weiterhin

$f'(x) < 0$ für $-\infty < x < -1$

$f'(x) > 0$ für $-1 < x < 0$

$f'(x) < 0$ für $0 < x < 1$

$f'(x) > 0$ für $1 < x < \infty$



(b) Zusammenfassend sei hier noch einmal festgehalten, was man unter einer systematischen Kurvendiskussion versteht:

(1) Festlegung des maximalen Definitionsbereichs

(2) Festlegung des Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbereichs

(3) Bestimmung der (ersten drei) Ableitungen von f

(4) Untersuchung der Funktion an den Rändern

(a) an den äußeren Rändern
(b) an den Polstellen

(5) Bestimmung der Nullstellen von f

(6) Bestimmung der Extrema von f

(7) Bestimmung der Wendepunkte von f (d.h. der Punkte, an denen $f''(x)=0$)

(8) Untersuchung des Monotonieverhaltens von f

(9) Untersuchung des Krümmungs-

verhaltens von f (d.h. $f''(x)$)

(10) Berechnung spezieller Funktionswerte von f

(11) Zeichnen des Funktionsgraphen

2.6. Die Taylorentwicklung

In den Übungen haben wir schon gesehen, daß sich manche Funktionen durch unendliche Reihen darstellen lassen, etwa

$$f(x) = \frac{1}{3+2x} \overset{|x|<3/2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+1}} x^k .$$

Solche Darstellungen sind in vielen Anwendungen sehr nützlich, insbesondere weil die n-te Partialsumme einer solchen Reihe eine nützliche Approximation der Funktion darstellt.

Definition: Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt analytisch, wenn es zu jedem $x_0 \in I$ ein $\delta > 0$ und eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

gibt, so daß für $|x-x_0| < \delta$ gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n .$$

Satz: Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ in $|x-x_0|<r$, so ist f beliebig oft differenzierbar und $f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$, also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Beweis:

Es ist

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-x_0)^n \Big|_{x=x_0} = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$
$$= n!$$

Für $x=x_0$ verschwinden in der Reihendarstellung jedoch alle außer dem konstanten Term, daher ist $f^{(n)}(x_0) = a_n n!$

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad \square$$

Die Nützlichkeit der Partialsummen solcher Reihendarstellungen folgt dann aus folgendem Satz, den wir hier ohne Beweis aufführen:

Satz: (Satz von Taylor)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^{n+1}-Funktion, $a < x_0 < b$. Dann gilt die Taylor-formel:

$$f(x) = p_n(f; x; x_0) + r_n(f; x; x_0)$$

mit dem Taylorpolynom n-ten Grades

$$p_n(f; x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

und dem n-ten Taylorschen Rest

$$r_n(f; x; x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

mit ξ zwischen x und x_0.

Beispiele:

(a) Betrachte die Funktion

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}, \quad x > -1, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

An der Stelle $x_0 = 0$ ist

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

usw., und man bekommt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

mit $$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k-1)}{k!}$$

(b) Man betrachte die Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im $x_0 = 0$. Es ist

$$f'(0) = 1, \ f''(0) = 0, \ f'''(0) = -1$$

usw. Daher ist

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Aus dem Taylorschen Satz folgt jedoch noch nicht, daß die Taylorreihe auch gegen die Funktion konvergiert.

Die Taylorreihe ist genau dann konvergent gegen f, wenn

$$\lim_{n \to \infty} r_n(f, x, x_0) = 0.$$

Es gibt jedoch auch Fälle, in denen die Taylorreihe konvergiert, jedoch nicht gegen die Funktion f!

Als Übung betrachte man z.B. die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Für die Konvergenz der Taylorreihe gegen die gegebene Funktion benötigt man eine stärkere Bedingung:

Satz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Existieren $M>0$ und $c>0$ mit

$$|f^{(n)}(x)| \leq M\cdot c^n \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

so konvergiert die Taylorreihe von f gegen f.

Beispiel:

Oben hatten wir die Taylorentwicklung der Funktion $f(x)=\sin x$ um den Punkt $x_0=0$ betrachtet.

Es ist

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x, & n=2k \\ (-1)^k \cos x, & n=2k+1 \end{cases}$$

und daher

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1,$$

so daß die Taylorreihe gegen $f(x)$ konvergiert.

Weitere Beispiele:

(a) Es ist häufig üblich die elementaren Funktionen $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$ etc. über ihre Potenzreihen zu <u>definieren</u>, also

$$\exp x \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

usw. Damit führt man diese auf die Grundrechenarten Addition und Multiplikation zurück, während man sonst z.B. $\sin x$ nur aus einer geometrischen Konstruktion bestimmen kann.

(b) Bestimmen wir auch noch die Taylorreihe für die Logarithmusfunktion um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$f(x) = \ln(1+x)$$

Es ist

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$$

$$f'''(0) = 2\frac{1}{(1+0)^3} = 2$$

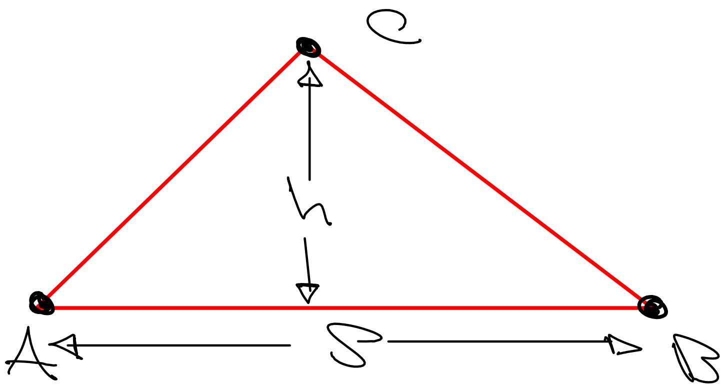
Allgemein:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} (n-1)!, \quad n \geq 1$$

Daher:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

(c) Zwischen A und B bestehen die folgenden Straßenverbindungen:



Der Umweg von A nach B bei Fahrt über C ist

$$U = 2\left(\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 + h^2} - \frac{S}{2}\right)$$
$$= S\left(\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{S}\right)^2} - 1\right)$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich deutlich, wenn wir die Reihenentwicklung von $\sqrt{1+x}$ benutzen:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots$$

Verwendet man nur das Taylor Polynom 1. Ordnung,

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad x \ll 1,$$

so erhält man folgende Näherung für den Umweg,

$$U = S\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2h}{S}\right)^2 - 1\right)$$
$$= \frac{2h^2}{S},$$

die $h \ll S$ gültig ist. Daraus lassen sich dann Abschätzungen machen wie: verdoppelt sich die Höhe h, so vervierfacht sich für $h \ll S$ der Umweg. Solche Eigenschaften lassen sich aus dem ursprünglichen Ausdruck für U nicht ohne weiteres ablesen.

2.7. Grenzwerte und Ableitungen

Ableitungen erweisen sich auch als nützlich um Grenzwerte von (differenzierbaren) Funktionen zu berechnen.

Wir interessieren uns für Situationen

der folgenden Art:

(a) Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}$, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ wenn } \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(b) Grenzwerte vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ wenn } \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(c) Grenzwerte vom Typ $0 \cdot \infty$, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x), \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

(d) Grenzwerte vom Typ $(\pm\infty) - (\pm\infty)$, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)), \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Man überlegt sich, daß man die Grenzwerte (c) und (d) auf (a) und (b) zurückführen kann.

Dann gilt folgender Satz:

Satz: (Regeln von de l'Hospital)

Seien $f, g \in C^n(I)$, $n \geq 1$ und $x_0 \in \bar{I}$, d.h. dem Abschluß von I (auch: $x_0 = \pm\infty$).

(a) Wenn

$$\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x), \quad 0 \le k \le n-1,$$

dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)},$$

falls $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(n)}(x) \neq 0$ oder
$\lim\limits_{x\to x_0} g^{(n)}(x) \neq 0$.

(b) Wenn

$$\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = \pm\infty = \lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x), \quad 0 \le k \le n-1,$$

dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)},$$

falls $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(n)}(x) \neq \pm\infty$ oder
$\lim\limits_{x\to x_0} g^{(n)}(x) \neq \pm\infty$.

Beweis:

(a) Betrachte den Fall $n=1$

$$f(x_0) = 0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$g(x_0) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Dann ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)^{-1}$$

Grenzübergang $x \to x_0$ liefert dann die Behauptung. Der Fall $n>1$ folgt durch vollständige Induktion.

(b) Der Beweis dieses Teils ist etwas komplizierter und wird in den Analysisvorlesungen erbracht.

Beispiele:

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

im Punkt $x_0 = 0$.

Nach der Regel von de l'Hospital (a) ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

(b) Betrachte die Funktion

$$f(x) = x \cdot \ln x$$

im Punkt $x_0 = 0$. Nach der zweiten Regel ist

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$