1. Folgen und Reihen

1.1. Zahlen

Man erinnere sich zunächst an die verschiedenen Klassen von Zahlen:

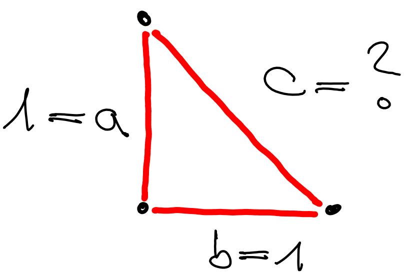
$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{ r = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \}$ die Menge der rationalen Zahlen

Mithilfe der rationalen Zahlen läßt sich zwar die Mehrzahl der Rechnungen des täglichen Lebens durchführen, aber manch einfache geometrische Aufgabe läßt sich mit ihnen nicht lösen:



Satz v. Pythagoras

$$\underbrace{a^2+b^2}_{2} = c^2$$

aber: $\nexists\, c \in \mathbb{Q}: c^2 = 2$ (Beweis?)

Definiere daher die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Vervollständigung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, d.h.

$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$$

wo $\overline{\mathbb{Q}}$ die Menge aller Grenzwerte rationaler Folgen.

Als zusätzliche (und letzte) Erweiterung definieren wir später die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ (s.u. im Abschnitt 3).

1.2 Folgen und Reihen

Definition: (Eindeutigkeit)

Es seien X und Y zwei nichtleere Mengen. Eine Zuordnung $X \ni x \longmapsto y \in Y$ heißt eindeutig, wenn jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ zugeordnet wird.

Definition: (Folge)

Eine Folge ist eine eindeutige Zuordnung

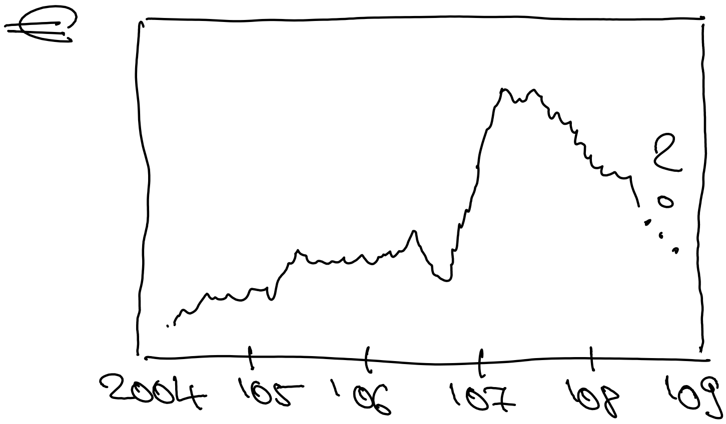
$$\mathbb{N} \ni n \longmapsto a_n \in \mathbb{K},$$

wobei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ (rationale Folge) oder auch $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (reelle Folge).

Man schreibt $(a_1, a_2, \ldots)$ oder $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiele:

(a) Börsenkurse



a_n = Preis des Wertpapiers zum Zeitpunkt n

a_0 = Preis zum Referenzzeitpunkt (z.B. Erstnotierung)

$\Longrightarrow$ empirische Folge, Bildungsgesetz?

(b) Vermehrung

Nach 1-monatiger Entwicklungszeit werfe ein Kaninchenpaar in jedem darauffolgenden Monat ein junges Paar. Wieviele Tiere gibt es (ausgehend von einem Paar) nach n Monaten, wenn keine Tiere sterben?

Offensichtlich gilt

$$a_n = \underbrace{a_{n-1}}_{\text{Population des Vormonats}} + \underbrace{a_{n-2}}_{\text{fortpflanzungsfähige Population}}$$

außerdem: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

Es handelt sich also um eine rekursive Folge mit den Gliedern

$$(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots),$$

die sogenannte Fibonacci-Folge.

Für Folgen gelten die üblichen Rechenregeln für reelle (bzw. rationale) Zahlen. Insbesondere lassen sich Folgen mit den elementaren Operationen zusammensetzen:

Summenfolge $(a_n + b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$

Differenzfolge $(a_n - b_n) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots)$

Produktfolge $(a_n \cdot b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots)$

Quotientenfolge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots\right)$

Definition: (Reihe)

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die abgeleitete Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \dots + a_n$$

heißt unendliche Reihe mit dem n-ten Glied a_n und der n-ten Partialsumme S_n.

Beispiel: („kleiner Gauß")

Der Schullehrer des berühmten Mathematikers

Carl Friedrich Gauß (1777–1855) wollte in einer Schulstunde in Ruhe seine Zeitung lesen und gab seinen Schülern daher auf, alle (ganzen) Zahlen von 1 bis 100 schriftlich zu addieren.

Gauß erkannte, daß sich die Summe wie folgt schreiben läßt:

$$
\begin{aligned}
S_{100} &= 1 + \dots + 100 \\
&= (1+100) + (2+99) + (3+98) + \dots \\
&= 50 \cdot 101 = 5050
\end{aligned}
$$

und war nach wenigen Minuten fertig.

allgemein: $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis:

Zum Beweis bedient man sich des folgenden Axioms

Axiom: (Induktionsprinzip)

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $\mathcal{A}(n)$ eine Aussage für alle $n \geq n_0$. Angenommen, man kann beweisen:

(a) Induktionsanfang: $\mathcal{A}(n_0)$ ist richtig

(b) Unter der Induktionsannahme, daß $\mathcal{A}(n)$ für ein $n \geq n_0$ richtig ist, folgt die Induktionsbehauptung, daß $\mathcal{A}(n+1)$ richtig ist

Dann ist $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \geq n_0$ richtig.

Hier also:

(a) $S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

(b) Angenommen $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ für ein $n \geq 1$. Betrachte

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ✓ \qquad \square$$

1.3. Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen

Zwei besonders häufig vorkommende Folgen und deren Reihen wollen wir uns noch etwas genauer anschauen.

Definition: (arithmetische Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt arithmetisch, wenn es eine Konstante $d \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exkurs: (Quantoren)

(a) Gilt eine Aussage für jedes Element x einer Menge M, so schreibt man

$$\forall x \in M$$

(„für alle x aus M")

(3) Gilt eine Aussage für mindestens ein $x \in M$, so schreibt man

$$\exists\, x \in M$$

(„es existiert ein x aus M")

Beispiel:

Offensichtlich ist die oben betrachtete Folge $a_n = n$ arithmetisch mit $d = 1$. Jede arithmetische Folge läßt sich daher wie folgt schreiben:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

(Beweis durch vollständige Induktion)

Die Partialsummen einer solchen Folge bilden eine arithmetische Reihe. Aus dem oben bewiesenen Satz („kleiner Gauß") ergibt sich:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left[a_1 + (k-1)\,d\right]$$

$$= n \cdot a_1 + d \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (k-1)}$$

$$\sum_{k=2}^{n} (k-1) = \sum_{k'=1}^{n-1} k' = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2}\,d$$

Definition: (geometrische Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt geometrisch, wenn es eine Konstante $q\in\mathbb{R}$, $q\neq 0$ gibt, so daß

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Offensichtlich läßt sich daher a_n schreiben als

$$a_n=a_1 q^{n-1}$$

Die Partialsummen einer solchen Folge bilden eine geometrische Reihe

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1}$$

Durch Induktion beweist man, daß

$$S_n=a_1\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

Beispiel:

Vom indischen König Sheram sollte Sessa, der Erfinder des Schachspiels, zur Belohnung für jedes der 64 Felder des Schachbretts doppelt soviele Reiskörner erhalten wie für das vorherige, beginnend bei einem Korn für das erste Feld.

Auf dem k. Feld liegen also $a_k=2^{k-1}$ Reiskörner, insgesamt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \frac{1-2^n}{1-2}$$
$$= 2^n - 1$$

Sessa hätte also $2^{64}-1$ oder etwa $2\cdot 10^{19}$ Körner erhalten müssen. Bei 0,03 g pro Reiskorn entspricht das der Ladung von ca. 3,5 Millionen der größten der heute verfügbaren Containerschiffe!

1.4. Konvergenz von Folgen und Reihen

Offenbar wächst $a_n = 2^{n-1}$ aus obigem Beispiel ins Unermessliche. In manchen Fällen nähern sich Folgen jedoch einem endlichen Grenzwert an. Um diese Eigenschaft der Konvergenz zu diskutieren, benötigen wir einige weitere Begriffe.

Definition: (Monotonie)

Gegeben sei eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge heißt

(a) monoton wachsend (fallend), wenn

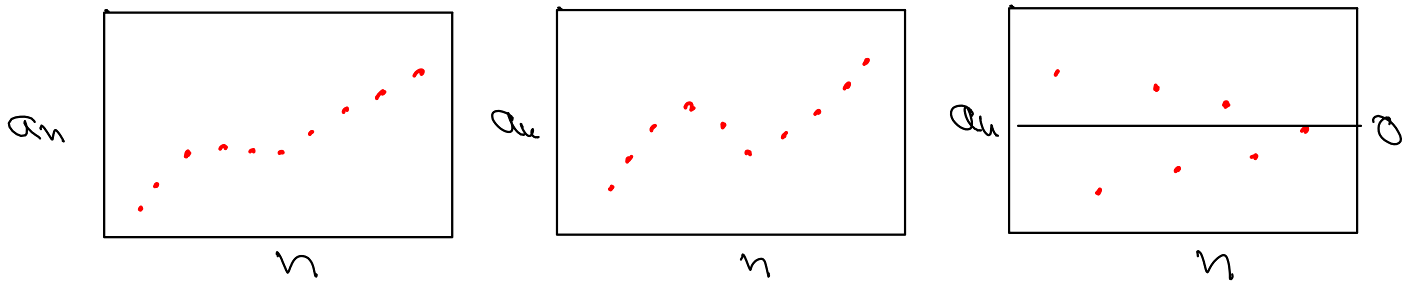
$$a_n \le a_{n+1} \quad (a_n \ge a_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) streng monoton wachsend (fallend), w.

$$a_n < a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(c) alternierend, wenn $a_n \cdot a_{n+1} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beispiele:



monoton, z.B. $a_n = 2^n$ — nicht monoton, z.B. $a_n = (n-5)^2$ — alternierend, z.B. $a_n = (-1)^n$

Die Folge $a_n = (-1)^n n^2$ ist alternierend, enthält aber monotone Teilfolgen a_{2k} u. a_{2k+1}, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Definition: (Beschränktheit)

Gegeben sei eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge heißt

(a) beschränkt, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so daß

$$|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) nach oben (nach unten) beschränkt

$$a_n \leq C \quad (a_n \geq C) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beispiel:

Die Folge $a_n = 5n$ ist nicht beschränkt: angenommen es gäbe ein $C \geq 0$ mit $|a_n| \leq C$ $\forall n$. Sei nun $n_0 = \lceil C \rceil$, d.h. die kleinste ganze Zahl größer als C. Dann ist $a_{n_0} > C$, im Widerspr.

zur Annahme. a_n ist jedoch nach unten beschränkt, denn $a_n \geq 0$.

Es ist nützlich, noch spezielle Schranken zu definieren, nämlich

(a) die kleinste obere Schranke, das Supremum von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\overline{\sigma} = \sup_n \{a_n\}$$

(b) die größte untere Schranke, das Infimum von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\underline{\sigma} = \inf_n \{a_n\}$$

Damit können wir uns nun der Konvergenz von Folgen zuwenden.

Definition: (Konvergenz)

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann heißt a der Grenzwert oder Limes der Folge.

Eine nicht-konvergente Folge heißt divergent.

Beispiel:

Für die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, denn zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$, so daß

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

für $n \geq n_0$. Eine solche Folge nennt man eine Nullfolge.

Wie hängen nun Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz zusammen?

Satz: (Konvergenz von Folgen)

(a) konvergente Folgen sind beschränkt

(b) eine monoton wachsende (fallende) und nach oben (nach unten) beschränkte Folge ist konvergent

(c) eine monoton wachsende (fallende) und nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum (Infimum).

Die Beweise werden in den späteren Mathematikvorlesungen nachgeliefert.

Man beachte also:

(a) nicht jede beschränkte Folge ist konvergent, z.B.

$$a_n = (-1)^n$$

(b) nicht jede konvergente Folge ist monoton, z.B.

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

Damit verstehen wir nun auch die Bedeutung der reellen Zahlen besser, denn es gilt

Axiom: (Supremumsaxiom)

Jede nichtleere nach oben (unten) beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum).

Dieses gilt nicht für $A \subseteq \mathbb{Q}$, aber die Suprema / Infima können durch Folgen in $\mathbb{Q}$ gebildet werden.

Für konvergente Folgen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ gelten folgende Rechenregeln:

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(b) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = a \cdot b$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b_n \neq 0 \neq b$

Da die Partialsummen S_n einer Reihe selbst eine Folge bilden, gelten für die Konvergenz von Reihen die obigen Aussagen ebenfalls.

Beispiel:

Die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ ist für $|q|<1$ konvergent, denn

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

so daß $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

Vorsicht ist jedoch geboten, wenn die Summanden der Reihe umgeordnet werden. Hier benötigt man noch folgenden Begriff.

Definition: (absolute Konvergenz)

Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_k |a_k|$ konvergiert. Sie heißt unbedingt konvergent, wenn jede Umordnung der Summanden die gleiche Summe liefert.

Es gilt dann folgender

Satz:

Jede absolut konvergente Reihe ist unbedingt konvergent.

Bei einer konvergenten jedoch nicht absolut konvergenten Reihe kann man dagegen durch Umordnen der Terme eine divergente Reihe erzeugen.

Aus diesen und ähnlichen Überlegungen lassen sich eine Reihe von Konvergenzkriterien für Reihen herleiten, die in den Analysis-Vorlesungen behandelt werden.